BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

NGUYỄN THỊ LIÊN

BÀI TOÁN BIÊN THỨ NHẤT KHÔNG CÓ ĐIỀU KIỆN BAN ĐẦU ĐỐI VỚI HỆ SCHRÖDINGER MẠNH TRONG MIỀN KHÔNG TRƠN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2016

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

NGUYỄN THỊ LIÊN

BÀI TOÁN BIÊN THỨ NHẤT KHÔNG CÓ ĐIỀU KIỆN BAN ĐẦU ĐỐI VỚI HỆ SCHRÖDINGER MẠNH TRONG MIỀN KHÔNG TRƠN

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 62.46.01.03
LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

GS. TSKH NGUYỄN MẠNH HÙNG

Hà Nội - 2016

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Mạnh Hùng. Các kết quả được phát biểu trong luận án là trung thực và chưa từng được công bố trong các công trình của các tác giả khác.

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Thị Liên

Lời cảm ơn

Luận án này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Mạnh Hùng. Nhân dịp này, Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất tới GS. TSKH Nguyễn Mạnh Hùng, cảm ơn thầy đã hướng dẫn tận tình và chu đáo từ khi Tôi còn là sinh viên. Tôi thực sự cảm thấy vô cùng may mắn khi được thầy hướng dẫn.

Tôi xin được cảm ơn các Giảng viên và các thành viên trong Seminar của Bộ môn Giải tích Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã có những góp ý hết sức hữu ích cho công việc nghiên cứu của Tôi. Tôi xin gửi lời cảm ơn gia đình, nguồn động lực lớn lao giúp tôi có thể hoàn thành luận án này.

Tác giả

Mục lục

Mục lục 3

Chương 1. TÍNH GIẢI ĐƯỢC DUY NHẤT CỦA BÀI TOÁN 15

1.1. Phát biểu bài toán 15

1.1.1. Đặt bài toán 15

1.1.2. Một số bổ đề quan trọng 17

1.2. Sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu 19

1.3. Sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu 25

1.3.1. Tính duy nhất nghiệm 25

1.3.2. Sự tồn tại nghiệm suy rộng của bài toán không có điều kiện ban đầu 29

1.4. Kết luận Chương 1 31

Chương 2. TÍNH TRƠN CỦA NGHIỆM 33

2.1. Tính trơn của nghiệm theo biến thời gian của bài toán có điều kiện ban đầu 33

2.2. Tính trơn theo tập hợp các biến của nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu 38

2.3. Tính trơn của nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu 45

2.4. Kết luận Chương 2 47

Chương 3. BIỂU DIỄN TIỆM CẬN NGHIỆM TRONG LÂN CẬN CỦA

ĐIỂM NÓN 49
3.1. Các kiến thức bổ trợ 49
3.2. Biểu diễn tiệm cận nghiệm của bài toán elliptic phụ thuộc tham số trong lân cận của điểm nón 54
3.3. Biểu diễn tiệm cận nghiệm của bài toán biên không có điều kiện ban đầu đối với hệ Schrödinger trong lân cận điểm nón 67
3.4. Các ví dụ áp dụng 73
3.4.1. Ví dụ 1 74
3.4.2. Ví dụ 2 77
3.4.3. Ví dụ 3 78
3.5. Kết luận Chương 3 82

CÁC KHÔNG GIAN HÀM

Giả sử Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ với biên là $S = \partial\Omega$. Hơn nữa, giả thiết rằng $S \setminus \{0\}$ là trơn vô hạn ngoài gốc tọa độ và trong một lân cận U_0 của gốc tọa độ thì $\Omega \cap U_0$ trùng với nón $K = \{x : x/|x| \in G\}$, ở đây G là một miền trên mặt cầu đơn vị S^{n-1} với biên trơn. Đặt $r = |x|$. Với $a < b$, kí hiệu $\Omega_a^b = \Omega \times (a, b)$, $S_a^b = S \times (a, b)$. Đặc biệt, ta kí hiệu $Q = \Omega \times \mathbb{R}$, $\Gamma = S \times \mathbb{R}$, $G_\infty = G \times \mathbb{R}$ và $K_\infty = K \times \mathbb{R}$. Với mỗi bộ đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, đặt $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ và $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$.

Với mỗi hàm vectơ $u(x,t) = (u_1(x,t), \ldots, u_s(x,t))$, kí hiệu

$D^\alpha u = (D^\alpha u_1, \ldots, D^\alpha u_s)$, $|D^\alpha u|^2 = \sum\limits_{i=1}^{s} |D^\alpha u_i|^2$

và $u_{t^j} = (\dfrac{\partial^j u_1}{\partial t^j}, \ldots, \dfrac{\partial^j u_s}{\partial t^j})$, $|u_{t^j}|^2 = \sum\limits_{i=1}^{s} |\dfrac{\partial^j u_i}{\partial t^j}|^2$.

Trong luận án này, chúng tôi thường sử dụng các không gian hàm sau:

$C^k(\Omega)$ - không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp k trên Ω.

$C_0^\infty(\Omega)$ - không gian các hàm khả vi vô hạn với giá compact trong Ω.

$L_2(\Omega)$ - không gian các hàm bình phương khả tích trên Ω thỏa mãn

$$||u||_{L_2(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

$H^k(\Omega)$ - không gian các hàm giá trị phức đo được trên Ω có đạo hàm suy rộng đến cấp k thỏa mãn

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{k} \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

$H^{k-1/2}(S)$ - không gian vết của các hàm trong không gian $H^k(\Omega)$ trên S với

chuẩn

$$\|u\|_{H^{k-1/2}(S)} = \inf\{\|w\|_{H^k(\Omega)} : w \in H^k(\Omega),\, w|_S = u\}.$$

$H^{k,l}(\Omega_a^b)$ - không gian các hàm vectơ $u : \Omega_a^b \longrightarrow \mathbb{C}^s$ có đạo hàm suy rộng đến cấp k theo biến x và đến cấp l theo biến t thỏa mãn

$$\|u\|_{H^{k,l}(\Omega_a^b)} = \Big(\int\limits_{\Omega_a^b} (\sum_{|\alpha|=0}^{k} |D^\alpha u|^2 + \sum_{j=1}^{l} |u_{t^j}|^2) dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

$H^{k,l}(-\gamma, \Omega_a^b)$ - không gian Sobolev có trọng gồm các hàm vectơ u xác định trên Ω_a^b và có đạo hàm đến cấp k theo biến x và đến cấp l theo biến t thỏa mãn

$$\|u\|_{H^{k,l}(-\gamma,\Omega_a^b)} = \Big(\int\limits_{\Omega_a^b} (\sum_{|\alpha|=0}^{k} |D^\alpha u|^2 + \sum_{j=1}^{l} |u_{t^j}|^2) e^{-2\gamma t} dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Đặc biệt, ta đặt $L_2(-\gamma, \Omega_a^b) = H^{0,0}(-\gamma, \Omega_a^b)$.

$\overset{\circ}{H}{}^{k,l}(-\gamma, \Omega_a^b)$ - bao đóng trong $H^{k,l}(-\gamma, \Omega_a^b)$ của các hàm khả vi vô hạn triệt tiêu xung quanh S_a^b.

$H_\beta^l(K)$ - không gian Sobolev có trọng gồm các hàm $u(x)$ có các đạo hàm suy rộng đến cấp l thỏa mãn

$$\|u\|_{H_\beta^l(K)} = \Big(\int\limits_{K} \sum_{|\alpha|=0}^{l} r^{2(\beta+|\alpha|-l)} |D^\alpha u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

$H_\beta^{k,l}(-\gamma, \Omega_a^b)$ - không gian Sobolev có trọng gồm các hàm $u(x,t)$ có các đạo hàm suy rộng $D^\alpha u$, $u_{t^j}, |\alpha| \le k$, $1 \le j \le l$ thỏa mãn

$$\|u\|_{H_\beta^{k,l}(-\gamma,\Omega_a^b)} = \Big(\int\limits_{\Omega_a^b} (\sum_{|\alpha|=0}^{k} r^{2(\beta+|\alpha|-l)} |D^\alpha u|^2 + \sum_{j=1}^{l} |u_{t^j}|^2) e^{-2\gamma t} dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

$H_\beta^l(-\gamma, Q)$ - không gian các hàm $u(x,t)$ có các đạo hàm suy rộng $D^\alpha u_{t^j}$, $|\alpha| \le l$, $1 \le j \le l$, thỏa mãn

$$\|u\|_{H_\beta^l(-\gamma,Q)} = \Big(\int\limits_{Q} \sum_{|\alpha|+j=0}^{l} r^{2(\beta+|\alpha|+j-l)} |D^\alpha u_{t^j}|^2 e^{-2\gamma t} dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

$L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))$ - không gian các hàm $u:(0,\infty)\to L_2(\Omega)$ thỏa mãn

$$||u||_\infty = ess \sup_{0<t<\infty} ||u(t)||_{L_2(\Omega)} < +\infty.$$

$H^h(-\gamma,\mathbb{R};X)$ - không gian các hàm $f:\mathbb{R}\to X$ khả vi đến cấp h thỏa mãn

$$\|f\|_{H^k(-\gamma,\mathbb{R};X)} = \left(\sum_{j=0}^{k}\int_{\mathbb{R}} \|f_{t^j}\|_X^2 e^{-2\gamma t}dt\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Đặc biệt, kí hiệu

$$\begin{aligned} L_2^k(-\gamma,Q) =& H^k(-\gamma,\mathbb{R};L_2(\Omega)),\\ V_{\beta,k}^{l,0}(-\gamma,K_\infty) =& H^k(-\gamma,\mathbb{R};H_\beta^l(K)),\\ C^{\infty,k}(-\gamma,G_\infty) =& H^k(-\gamma,\mathbb{R};C^\infty(G)). \end{aligned}$$

MỞ ĐẦU

LỊCH SỬ VẤN ĐỀ VÀ LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Các bài toán (giá trị) biên đối với một phương trình hay một hệ phương trình đạo hàm riêng thường có nguồn gốc từ các ngành khoa học tự nhiên và kĩ thuật, đặc biệt là các mô hình giải tích của nhiều hiện tượng vật lí. Bởi tính thực tiễn đó, khi nghiên cứu các bài toán biên, một cách tự nhiên người ta quan tâm đến sự tồn tại duy nhất nghiệm và các mô hình giải số của chúng. Các bài toán biên ban đầu trong miền trơn và không trơn đã được nghiên cứu trong rất nhiều các công trình. Khi đó, điều kiện ban đầu thường đóng vai trò then chốt trong sự tồn tại duy nhất nghiệm. Tuy nhiên, có nhiều tình huống trong thực tế dẫn đến việc nghiên cứu bài toán biên không có điều kiện ban đầu, ví dụ khi ta mô tả các quá trình không dừng trong tự nhiên, chẳng hạn khi dữ kiện ban đầu ở xa đến mức nó không tác động đến thời điểm hiện tại, và do đó ta có thể coi thời điểm ban đầu là $t = -\infty$. Bài toán biên không có điều kiện ban đầu được nghiên cứu khá sớm và thu hút được sự quan tâm của một số lượng nhất định các nhà toán học. Sau đây, chúng tôi sẽ giới thiệu một cách tóm tắt lịch sử vấn đề và một số phương pháp sử dụng để giải bài toán biên không có điều kiện ban đầu (xem thêm trong [13]).

Người đầu tiên nghiên cứu bài toán dạng này là nhà toán học nổi tiếng người Nga N. A. Tikhonov. Năm 1935, trong công trình [60], tác giả đã xét phương trình truyền nhiệt với điều kiện biên Dirichlet như sau

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \Omega \times S,$$

$$u(x,t) = h(x,t),\ (x,t) \in \partial\Omega \times S,$$

trong đó Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$ với biên trơn từng khúc $\partial\Omega$, $S = (-\infty, 0]$ hoặc $S = \mathbb{R}$, và f, h là các hàm cho trước. Ta thấy rằng, nếu $f = 0$, $h = 0$ và $\Omega = (0, \pi)$ hoặc $\Omega = (0, +\infty)$ thì các hàm

$$u_C(x,t) = Ce^{-t}\sin x,\ (x,t) \in \Omega \times S,$$

$C \in \mathbb{R}$ là hằng số tùy ý, đều là nghiệm cổ điển của bài toán trên. Do đó để đảm bảo được tính duy nhất nghiệm, ta cần đòi hỏi thêm một số điều kiện của nghiệm. Trong công trình [60], Tikhonov sử dụng biểu diễn tích phân của nghiệm của bài toán biên ban đầu thứ nhất thông qua hàm Green tương ứng và chỉ ra rằng cần bổ sung điều kiện nghiệm bị chặn để đảm bảo tính duy nhất nghiệm của bài toán. Tương tự như vậy, nghiệm (duy nhất) bị chặn của bài toán biên Dirichlet không có điều kiện ban đầu đối với phương trình truyền nhiệt ở trên, với $f = 0$, thỏa mãn biểu diễn

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\{\frac{-x^2}{4(t-\tau)}\} h(\tau) d\tau,\ (x,t) \in [0, +\infty) \times S,$$

với giả thiết rằng hàm h là liên tục và bị chặn trên S. Tikhonov đặt tên bài toán này là *bài toán Fourier* hay *bài toán không có điều kiện ban đầu* cho phương trình truyền nhiệt. Sau này, ý tưởng của A. N. Tikhonov được sử dụng trong các công trình [4], [32], [33] để giải bài toán không có điều kiện ban đầu cho hệ parabolic tổng quát với các điều kiện biên khác với điều kiện biên Dirichlet. Công thức biểu diễn tích phân của nghiệm của các bài toán này và các định lí tồn tại duy nhất nghiệm được chứng minh trong các không gian Hölder địa phương, ở đó nghiệm bị chặn và không tăng.

Có một cách tiếp cận khác để giải bài toán không có điều kiện ban đầu cho một vài phương trình tiến hóa. Để đơn giản, ta xét phương trình truyền nhiệt khi $S = (-\infty, 0]$. Khi đó, sử dụng nguyên lí cực trị, ta có thể chứng minh tính duy nhất nghiệm của bài toán với điều kiện là nghiệm $u(x,t)$ bị chặn đều trên $\Omega \times S$ và hội tụ đều tới 0 trên $\overline{\Omega}$ khi $t \to -\infty$. Còn sự tồn tại nghiệm được

chứng minh bằng cách xây dựng dãy nghiệm xấp xỉ của bài toán có điều kiện ban đầu tương ứng. Cải tiến phương pháp này có thể sử dụng để giải quyết một số bài toán không có điều kiện ban đầu cho một số lớp phương trình tiến hóa, cụ thể là cho phương trình tựa tuyến tính và phương trình có trễ [10], [11], [59]. Trong trường hợp này, có thể đòi hỏi thêm một số điều kiện về dáng điệu tiệm cận nghiệm khi $t \to \infty$ và tính bị chặn của nghiệm.

Khi xét nghiệm suy rộng của bài toán không có giá trị ban đầu, người ta có những cách tiếp cận khác nhau, phụ thuộc vào việc miền Ω là bị chặn hay không bị chặn. Trong trường hợp miền Ω bị chặn, ta thường cần đặt thêm các điều kiện để chắc chắn sự tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng. Chẳng hạn, khi xét bài toán biên Dirichlet không có điều kiện ban đầu đối với phương trình truyền nhiệt, để đảm bảo sự duy nhất nghiệm thì ta cần đặt thêm điều kiện

$$e^{\lambda_1 t}|u(t,x)| \to 0 \text{ khi } t \to -\infty;$$

và để đảm bảo sự tồn tại nghiệm thì ta cần thêm điều kiện

$$\int_S e^{-2\omega t}||f||^2_{H^{-1}(\Omega)}dt < \infty,$$

trong đó $\omega > -\lambda_1$ và λ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta$ với điều kiện biên Dirichlet. Ngoài ra, các kết quả cho các lớp phương trình khác trong trường hợp miền Ω bị chặn có thể tìm thấy trong các tài liệu [5], [7], [9], [12], [14], [15], [17], [18], [42], [46], [54], [56].

Khi xét bài toán trong trường hợp miền không bị chặn, kết quả về bài toán biên không có điều kiện ban đầu cho một số lớp phương trình tiến hóa có thể xem trong các tài liệu, chẳng hạn [45]. Ngoài ra, các bài toán không có điều kiện ban đầu cho các phương trình tiến hóa liên quan đến đạo hàm cấp hai theo biến thời gian, hệ Sobolev-Hal'pern tuyến tính, các phương trình kiểu hyperbolic được nghiên cứu trong [21], [35], [36], [43], [44], [47], [52], [58], [61], [62].

Tóm lại, chúng ta có thể thấy, có rất nhiều công trình nghiên cứu về bài toán không có điều kiện ban đầu. Các kết quả đạt được chủ yếu xoay quanh sự tồn tại duy nhất nghiệm và miền chứa biến không gian Ω, dù bị chặn hay không bị chặn, đều là miền với biên trơn từng khúc. Như vậy, bên cạnh những kết quả đã đạt được khi nghiên cứu bài toán không có điều kiện ban đầu, vẫn còn rất nhiều vấn đề mở, trong đó các vấn đề mở chúng tôi quan tâm đó là:

• Các tính chất khác của nghiệm suy rộng, chẳng hạn tính trơn theo các biến của nghiệm bài toán không có điều kiện ban đầu.

• Bài toán không có điều kiện ban đầu cho các lớp phương trình tiến hóa khác.

• Xét bài toán khi miền Ω chứa các điểm kì dị.

Trên thực tế, rất nhiều các bài toán ứng dụng quan trọng được đưa về việc nghiên cứu các bài toán biên đối với phương trình, hệ phương trình đạo hàm riêng trong miền có biên không trơn. Bài toán biên elliptic tổng quát trong các miền chứa hữu hạn các điểm góc hay điểm nón đã được nghiên cứu một cách tương đối đầy đủ trong các công trình của V. A. Kondratiev, O. A. Oleinik ([37], [38]); V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann ([39], [40], [51]) và các tác giả khác. Trong các công trình đó, các tác giả đã nhận được kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm, tính trơn của nghiệm và biểu diễn tiệm cận nghiệm trong lân cận của các điểm kì dị của biên. Bên cạnh đó, bài toán biên đối với các phương trình, hệ phương trình không dừng trong miền với biên không trơn cũng nhận được sự quan tâm của nhiều nhà toán học, như G. Eskin ([19]), A. Yu. Kokotov và B. A. Plamenevskii ([41]),...

Trong các hệ không dừng, hệ phương trình Schrödinger có vai trò quan trọng nhất định vì có những ứng dụng thực tiễn trong cơ học lượng tử (xem [1], [16]). Các bài toán biên đối với hệ phương trình loại này được đưa ra và phân tích đầu tiên bởi J. L. Lions và E. Magenes ([49], [50]). Trong các công trình của mình, các tác giả đã nghiên cứu các bài toán biên đối với phương

trình Schrödinger mà các hệ số của nó độc lập với biến thời gian và nhận được kết quả trong hình trụ hữu hạn $\Omega \times [0, T],\ T < +\infty$. Năm 1998, N. M. Hung đã phát triển bài toán này cho hệ phương trình với hệ số phụ thuộc thời gian. Bằng cách sử dụng phương pháp cắt thiết diện, chuyển bài toán đang xét về bài toán elliptic phụ thuộc tham số trong miền chứa điểm nón, tác giả cũng nhận được các kết quả tương ứng trong trụ hữu hạn. Bài toán biên ban đầu thứ nhất cho hệ phương trình loại này trong trụ vô hạn $Q = \Omega \times [0, \infty)$ được N. M. Hung và C. T. Anh nghiên cứu trong các công trình [23], [24], [25], [26]. Bằng phương pháp xấp xỉ Galerkin, các tác giả đã đạt được kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng và tính trơn của nghiệm theo biến thời gian. Kết quả về tính trơn theo biến không gian và biểu diễn tiệm cận nghiệm có thể đạt được bằng phương pháp cắt thiết diện đã nêu ở trên. Trong công thức biểu diễn tiệm cận nghiệm, với một số giả thiết về sự phân bố các giá trị riêng của bài toán phổ tương ứng, nghiệm suy rộng sẽ được phân tích thành tổng hai phần chính trong một lân cận đủ nhỏ của điểm nón. Phần thứ nhất đặc trưng cho tính kì dị của bài toán, còn phần thứ hai có tính trơn theo biến không gian theo tính trơn của vế phải. Tiếp theo đó, các tác giả N. M. Hung và N. T. K. Son đã nghiên cứu bài toán biên ban đầu thứ hai đối với hệ Schrödinger trong miền có điểm nón. Trong các công trình [29], [30], [31], các tác giả cũng nhận được các kết quả tương tự như khi xét bài toán biên ban đầu thứ nhất.

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu bài toán biên thứ nhất không có giá trị ban đầu cho hệ phương trình Schrödinger trong miền có điểm nón. Không chỉ xây dựng không gian nghiệm phù hợp để đảm bảo sự tồn tại duy nhất nghiệm, chúng tôi còn thiết lập các kết quả về tính chính quy của nghiệm và xây dựng công thức biểu diễn tiệm cận của nghiệm trong lân cận của điểm kì dị. Chú ý rằng, nếu miền đáy chứa hữu hạn điểm nón thì bằng cách sử dụng phân hoạch đơn vị, chúng tôi có thể chuyển về xét bài toán trong trường hợp đáy chứa một điểm nón. Vì vậy, trong cả luận án này, không mất tính tổng

quát, chúng tôi chỉ nghiên cứu bài toán khi đáy của hình trụ đang xét chỉ chứa một điểm nón trùng với gốc tọa độ.

MỤC ĐÍCH, ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

• Mục đích luận án: Góp phần hoàn thiện việc nghiên cứu tính giải được duy nhất, tính trơn của nghiệm cũng như dáng điệu tiệm cận nghiệm trong lân cận điểm nón của bài toán không có điều kiện ban đầu trong miền có chứa điểm kì dị.

• Đối tượng nghiên cứu: Bài toán biên thứ nhất không có điều kiện ban đầu đối với hệ phương trình Schrödinger trong miền chứa điểm nón.

• Phạm vi nghiên cứu:

– **Nội dung 1:** Sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán.

– **Nội dung 2:** Tính trơn của nghiệm của bài toán.

– **Nội dung 3:** Biểu diễn tiệm cận nghiệm trong lân cận của điểm nón.

PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

- Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu, chúng tôi xây dựng dãy nghiệm xấp xỉ của bài toán có điều kiện ban đầu $t = h$ tương ứng và chuyển qua giới hạn khi thời điểm ban đầu dần tới $-\infty$.

- Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu, chúng tôi sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin.

- Để chứng minh sự duy nhất nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu, phương pháp được chúng tôi lựa chọn là phương pháp chọn hàm thử của Ladyzenskaya. Mặc dù không có điều kiện ban đầu nhưng chúng tôi vẫn đạt được kết quả về sự duy nhất nghiệm do chúng tôi đã sử dụng một bổ đề tương tự như Bổ đề Gronwall trong khoảng vô hạn và đặt thêm một số giả thiết phù hợp về vế phải và các hệ số của toán tử L.

- Để chứng minh tính trơn của nghiệm, chúng tôi nghiên cứu tính trơn của các bài toán có điều kiện ban đầu tương ứng, sau đó bằng cách tiến qua giới hạn khi cho thời điểm ban đầu tiến tới $-\infty$, ta được tính trơn của nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu.

- Để thu được biểu diễn tiệm cận nghiệm trong lân cận của điểm nón, chúng tôi sử dụng phương pháp cắt thiết diện, chuyển bài toán không dừng về bài toán elliptic chứa tham số trong miền có điểm nón và sử dụng các kết quả về bài toán elliptic.

CẤU TRÚC VÀ CÁC KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN

Luận án, ngoài phần Lời cam đoan, Lời cảm ơn, Các không gian hàm, Mở đầu, Kết luận, Kiến nghị một số hướng nghiên cứu tiếp theo, Danh mục các công trình và Tài liệu tham khảo, gồm 3 chương:

- Chương 1: Tính giải được duy nhất của bài toán.
- Chương 2: Tính trơn của nghiệm.
- Chương 3: Biểu diễn tiệm cận nghiệm trong lân cận của điểm nón.

Các kết quả của luận án là mới, có ý nghĩa khoa học, góp phần hoàn thiện lí thuyết bài toán biên không có điều kiện ban đầu và bài toán biên không dừng trong miền không trơn. Nội dung chính của luận án đã được công bố trong 03 bài báo khoa học trên các tạp chí quốc tế trong danh mục ISI và được liệt kê ở mục **Danh mục công trình** và được báo cáo tại:

- Hội nghị khoa học khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội các năm 2013, 2016.

- Hội nghị khoa học khoa Công nghệ thông tin, Học viện Quản lí Giáo dục, 2013.

- Seminar của Bộ môn Giải tích, khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

Chương 1

TÍNH GIẢI ĐƯỢC DUY NHẤT CỦA BÀI TOÁN

Mục đích của chương này là giới thiệu bài toán và nghiên cứu tính giải được duy nhất của bài toán. Tính duy nhất nghiệm được chứng minh bằng phương pháp chọn hàm thử của Ladyzenskaya, còn sự tồn tại nghiệm được chứng minh bằng cách xấp xỉ nghiệm bởi một dãy các nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu tương ứng. Mặc dù đã có các kết quả nghiên cứu về sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán biên ban đầu đối với hệ phương trình Schrödinger nhưng ở đây chúng tôi không áp dụng trực tiếp được các kết quả đó mà phải xây dựng lại các ước lượng tiên nghiệm để có thể tiến qua giới hạn dãy nghiệm xấp xỉ. Kết quả chính của chương này là Định lí 1.3. Các kết quả của chương này không chỉ đúng khi miền đáy Ω chứa điểm nón mà còn đúng cho miền tùy ý. Nội dung chính của chương này được viết dựa trên phần đầu các bài báo số 1, 2 trong danh mục công trình của tác giả.

1.1. Phát biểu bài toán

1.1.1. Đặt bài toán

Xét toán tử vi phân cấp $2m$ sau đây

$$L(x,t,D) = \sum_{|p|,|q|=0}^{m} (-1)^{|p|} D^p\big(a_{pq}(x,t)D^q\big),$$

trong đó a_{pq} là các ma trận cỡ $s \times s$ với các phần tử là các hàm đo được, bị chặn trong $\overline{Q}$ và thỏa mãn $a_{pq} = a_{qp}^*$ với $|p| = |q| = m$ (trong đó a_{qp}^* là ma trận liên hợp phức chuyển vị của ma trận a_{pq}). Hơn nữa, giả sử tồn tại hằng

số dương a_0 sao cho với mọi $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\eta \in \mathbb{C}^s \setminus \{0\}$ và $(x,t) \in Q$, ta có

$$\sum_{|p|=|q|=m} a_{pq}(x,t)\xi^p\xi^q\eta\overline{\eta} \geq a_0|\xi|^{2m}|\eta|^2,$$

trong đó $\xi^p = \xi_1^{p_1}\dots\xi_n^{p_n}$, $\xi^q = \xi_1^{q_1}\dots\xi_n^{q_n}$.
Giả sử

$$B(t,u,v) = \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int_\Omega a_{pq}D^p u\overline{D^q v}dx,\ t \in \mathbb{R},$$

là dạng song tuyến tính tương ứng với toán tử vi phân $L(x,t,D)$. Khi đó, ta có bổ đề sau (xem trong [20]).

Bổ đề 1.1. *Tồn tại hằng số dương $\widehat{\mu}_0$ và hằng số không âm λ_0 sao cho*

$$(-1)^m B(t,u,u) \geq \widehat{\mu}_0||u(\cdot,t)||^2_{H^m(\Omega)} - \lambda_0||u(\cdot,t)||^2_{L_2(\Omega)},$$

với mọi $u(\cdot,t) \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ và $t \in \mathbb{R}$ hầu khắp nơi, trong đó $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ là bao đóng của không gian các hàm khả vi vô hạn với giá compact trong Ω trong không gian $H^m(\Omega)$.

Do đó, bằng cách thay toán tử L bởi toán tử $L + (-1)^m\lambda_0 I$ nếu cần thiết, ta giả sử trong cả luận án này rằng

$$B(t,u,u) \geq \mu_0\|u(\cdot,t)\|^2_{H^m(\Omega)}, \tag{1.1}$$

với mọi $u(\cdot,t) \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ và $t \in \mathbb{R}$ hầu khắp nơi.

Xét bài toán sau trong hình trụ Q

$$(-1)^{m-1}iL(x,t,D)u - u_t = f(x,t) \text{ trong } Q, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}|_\Gamma = 0, \quad j = 0,\dots,m-1, \tag{1.3}$$

trong đó ν là pháp vectơ ngoài đơn vị với mặt xung quanh Γ.

Định nghĩa 1.1. Giả sử $f \in L_2(-\gamma,Q)$, hàm vectơ $u \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma,Q)$ được gọi là một nghiệm suy rộng của bài toán (1.2)-(1.3) nếu với mọi $T > 0$, đẳng

thức tích phân

$$(-1)^{m-1}i\int\limits_{-\infty}^{T} B(t,u,\eta)dt + \int\limits_{\Omega_{-\infty}^{T}} u\overline{\eta_t}dxdt = \int\limits_{\Omega_{-\infty}^{T}} f\overline{\eta}dxdt, \tag{1.4}$$

đúng với mọi hàm thử $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}(\gamma, Q)$, $\eta(x,t) = 0$ khi $t \geq T$.

Nhận xét 1.1.2. Trong định nghĩa nghiệm suy rộng, mặc dù không gian hàm thử và không gian nghiệm không chứa nhau nhưng do không gian các hàm khả vi vô hạn giá compact $C_0^\infty(Q)$ trù mật trong cả hai không gian nói trên nên khi nghiệm suy rộng đủ tốt thì nó vẫn quay trở lại là nghiệm cổ điển.

1.1.2. Một số bổ đề quan trọng

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu hai bổ đề quan trọng, được sử dụng trong việc chứng minh sự duy nhất nghiệm và trong việc xây dựng các lượng tiên nghiệm.

Bổ đề 1.2. *(Bất đẳng thức Gronwall) Giả sử $\lambda(t)$ là một hàm thực liên tục và $\mu(t)$ là một hàm liên tục không âm trên đoạn trên đoạn $[a,b]$. Nếu hàm $y(t)$ liên tục thỏa mãn điều kiện*

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int\limits_{a}^{t} \mu(s)y(s)ds, \tag{1.5}$$

với mọi $a \leq t \leq b$, thì trên đoạn đó ta có

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int\limits_{a}^{t} \lambda(s)\mu(s)\exp\left(\int\limits_{s}^{t} \mu(\tau)d\tau\right)ds. \tag{1.6}$$

Nói riêng, nếu $\lambda(t) \equiv C$ là hằng số thì

$$y(t) \leq C\exp\left(\int\limits_{a}^{t} \mu(s)ds\right). \tag{1.7}$$

Chứng minh. Đặt $z(t) = \int\limits_a^t \mu(s)y(s)ds$ thì khi đó z khả vi và do (1.5) ta có

$$\dot{z}(t) - \mu(t)z(t) \leq \lambda(t)\mu(t).$$

Đặt $w(t) = z(t)\exp\left(-\int\limits_a^t \mu(s)ds\right)$ thì bất đẳng thức cuối cùng tương đương với

$$\dot{w}(t) \leq \lambda(t)\mu(t)\exp\left(-\int\limits_a^t \mu(s)ds\right).$$

Do $w(a) = 0$, lấy tích phân hai vế từ a đến t, ta được

$$w(t) \leq \int\limits_a^t \lambda(s)\mu(s)\exp\left(-\int\limits_a^s \mu(\tau)d\tau\right)ds,$$

hay tương đương

$$z(t) \leq \int\limits_a^t \lambda(s)\mu(s)\exp\left(\int\limits_s^t \mu(\tau)d\tau\right)ds,$$

do định nghĩa của $w(t)$. Do $y(t) \leq \lambda(t) + z(t)$ nên bổ đề được chứng minh. □

Do trong luận án chúng tôi xét bài toán không có điều kiện ban đầu nên để chứng minh tính duy nhất nghiệm thì chúng tôi cần đến kết quả tương tự như bổ đề Gronwall trong miền vô hạn. Vì vậy, chúng tôi phát biểu và chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 1.3. *Giả sử $\mu(t)$ là hàm số xác định, liên tục, không âm và $y(t)$ là hàm liên tục trên đoạn $(-\infty, 0]$ sao cho các tích phân $\int\limits_{-\infty}^0 \mu(t)y(t)dt$; $\int\limits_{-\infty}^0 \mu(t)dt$; $\int\limits_{-\infty}^0 y(t)dt$ hội tụ và*

$$y(t) \leq C + \int\limits_{-\infty}^t y(s)\mu(s)ds, \quad \forall t \leq 0, \tag{1.8}$$

thì

$$y(t) \leq C\exp\left(\int\limits_{-\infty}^t \mu(s)ds\right), \quad \forall t \leq 0. \tag{1.9}$$

Chứng minh. Đặt $z(t) = C + \int\limits_{-\infty}^{t} y(s)\mu(s)ds$ thì do tích phân $\int\limits_{-\infty}^{0} \mu(t)y(t)dt$ hội tụ và do (1.8) ta có

$$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt}\Big(\int\limits_{-\infty}^{0} \mu(\tau)y(\tau)d\tau + \int\limits_{0}^{t} \mu(s)y(s)ds\Big) = \mu(t)y(t) \leq z(t)\mu(t).$$

Khi đó, tiếp tục đặt $w(t) = z(t)\exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{t} \mu(s)ds\right)$ thì ta được

$$\dot{w}(t) = (\dot{w}(t) - z(t)\mu(t))\exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{t} \mu(s)ds\right) \leq 0,\ \forall t \leq 0.$$

Do đó $w(t) \leq \lim\limits_{T\to-\infty} w(T)$.

Mặt khác, $\lim\limits_{T\to-\infty} z(T) = C + \lim\limits_{T\to-\infty} \int\limits_{-\infty}^{T} \mu(t)y(t)dt = C$ và từ giả thiết ta có $\lim\limits_{T\to-\infty} \int\limits_{-\infty}^{T} \mu(s)ds = 0$ nên $\lim\limits_{T\to-\infty} w(T) = C$. Tức là ta có

$$z(t)\exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{t} \mu(s)ds\right) \leq \lim_{T\to-\infty} w(T) = C.$$

Kết hợp với (1.8) ta được

$$y(t) \leq z(t) \leq C\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{t} \mu(s)ds\right).$$

Bổ đề được chứng minh. □

1.2. Sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu

Trước tiên, với mỗi $h \in \mathbb{R}$, trong hình trụ Ω_h^∞ ta nghiên cứu bài toán sau

$$(-1)^{m-1}iL(x,t,D)v - v_t = f(x,t) \text{ trong } \Omega_h^\infty, \tag{1.10}$$

$$v\,|_{t=h} = 0,\ x \in \Omega, \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial^j v}{\partial \nu^j}\,|_{S_h^\infty} = 0, \quad j = 0,\ldots,m-1, \tag{1.12}$$

trong đó ν là pháp vectơ ngoài đơn vị với mặt xung quanh S_h^∞.

Định nghĩa 1.2. Một hàm vectơ $v \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, \Omega_h^\infty)$ được gọi là một nghiệm suy rộng của bài toán (1.10)-(1.12) nếu với mọi $T > h$ ta có

$$(-1)^{m-1} i \int_h^T B(t, v, \eta) dt + \int_{\Omega_h^T} v \overline{\eta_t} dx dt = \int_{\Omega_h^T} f \overline{\eta} dx dt \tag{1.13}$$

đúng với mọi hàm thử $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}(\gamma, \Omega_h^\infty)$, $\eta(x,t) = 0$ với mọi $t \geq T$.

Định lí sau trình bày về tính giải được duy nhất của bài toán (1.10)-(1.12).

Định lí 1.1. *Giả sử*

i) $\sup \left\{ |\dfrac{\partial a_{pq}}{\partial t}| : (x,t) \in \Omega_h^\infty,\ 0 \leq |p|, |q| \leq m \right\} = \mu < \infty$

ii) $f_t, f \in L_2(-\gamma, \Omega_h^\infty)$.

Khi đó với mọi $\gamma > \gamma_0 = \dfrac{m^\star \mu}{2\mu_0}$, $m^\star$ *là số các bộ đa chỉ số có cấp không vượt quá* m, *tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng* $v \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, \Omega_h^\infty)$ *của bài toán* (1.10)-(1.12) *và nghiệm đó thỏa mãn ước lượng tiên nghiệm sau:*

$$\|v\|^2_{H^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \leq C \left[\|f\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)} + \|f_t\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \right], \tag{1.14}$$

ở đó C *là hằng số dương không phụ thuộc vào* h, v *và* f.

Chứng minh. Sự duy nhất nghiệm. Giả sử $v_1(x,t)$ và $v_2(x,t)$ là hai nghiệm suy rộng của bài toán (1.10)-(1.12), đặt $v(x,t) = v_1(x,t) - v_2(x,t)$. Với mọi $T > 0,\ b \leq T$, đặt

$$\eta(x,t) = \begin{cases} \int_b^t v(x,\tau) d\tau, & -\infty \leq t \leq b; \\ 0, & b \leq t \leq T. \end{cases}$$

Khi đó $\eta(x,T)=0,\ \eta\in\overset{\circ}{H}{}^{m,1}(\gamma,\Omega_h^T)$ và $\eta_t(x,t)=v(x,t),\ h\le t\le b$. Từ định nghĩa của nghiệm suy rộng, ta có

$$(-1)^m\sum_{|p|,|q|=0}^{m}\int\limits_{\Omega_h^b}a_{pq}D^p\eta_t\overline{D^q\eta}dxdt+i\int\limits_{\Omega_h^b}|\eta_t|^2dxdt=0. \tag{1.15}$$

Cộng vế với vế của đẳng thức (1.15) với liên hợp phức của nó ta được

$$(-1)^m\sum_{|p|,|q|=0}^{m}\int\limits_{\Omega_h^b}a_{pq}\frac{\partial(D^p\eta\overline{D^q\eta})}{\partial t}dxdt=0.$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần theo t, ta có

$$B(h,\eta,\eta)=-\sum_{|p|,|q|=0}^{m}\int\limits_{\Omega_h^b}\frac{\partial a_{pq}}{\partial t}D^p\eta\overline{D^q\eta}dxdt.$$

Sử dụng giả thiết của Định lí 1.1 và bất đẳng thức Cauchy, ta suy ra

$$||\eta(\cdot,h)||^2_{H^m(\Omega)}\le C||\eta||^2_{H^{m,0}(\Omega_h^b)}. \tag{1.16}$$

Nếu ta kí hiệu

$$w_p(x,t)=\int\limits_t^h D^pv(x,\tau)d\tau,\ h\le t\le b,$$

thì

$$D^p\eta(x,t)=\int\limits_b^t D^pv(x,\tau)d\tau=w_p(x,b)-w_p(x,t).$$

Thay vào (1.16), ta có

$$\sum_{|p|=0}^{m}\int\limits_{\Omega}|w_p(x,b)|^2dx\le 2C\sum_{|p|=0}^{m}\int\limits_{\Omega_h^b}|w_p(x,t)|^2dxdt+2C\sum_{|p|=0}^{m}\int\limits_{\Omega}|w_p(x,t)|^2dx.$$

Khi ta đặt

$$J(t)=\sum_{|p|=0}^{m}\int\limits_{\Omega}|w_p(x,t)|^2dx,$$

thì

$$(1-2Cb)J(b) \leq C\int\limits_h^b J(t)dt.$$

Vì vậy

$$J(b) \leq 2C\int\limits_h^b J(t)dt,\ \forall b \in (h, \frac{1}{4C}],$$

trong đó hằng số dương C chỉ phụ thuộc vào μ và μ_0. Sử dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có:

$$J(t) \equiv 0 \quad \text{trên } (h, \frac{1}{4C}].$$

Do đó $v_1 \equiv v_2$ với hầu khắp $t \in (h, \frac{1}{4C}]$. Lập luận tương tự, ta có thể suy ra rằng sau một số hữu hạn bước thì $v_1 \equiv v_2$ với hầu khắp $t \in (h, T)$.

Sự tồn tại nghiệm. Sự tồn tại nghiệm được chứng minh bằng phương pháp xấp xỉ Galerkin. Giả sử $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở trực giao của $H^m(\Omega)$ và trực chuẩn trong $L_2(\Omega)$. Với mỗi $N \in \mathbb{N}$, xét hàm $v^N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} C_k^N(t)\varphi_k(x)$, với $\{C_k^N(t)\}_{k=1}^N$ là nghiệm của hệ phương trình vi phân sau

$$(-1)^{m-1}iB(t, v^N, \varphi_k) - \int\limits_\Omega v_t^N \overline{\varphi_k} dx = \int\limits_\Omega f\overline{\varphi_k} dx, \tag{1.17}$$

$$C_k^N(h) = 0,\ k = 1, \ldots, N.$$

Nhân hai vế của phương trình (1.17) với $\dfrac{d}{dt}C_k^N(t)$ và lấy tổng theo k từ 1 đến N, ta có

$$(-1)^m \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int\limits_\Omega a_{pq} D^q v^N \overline{D^p v_t^N} dx - i\int\limits_\Omega v_t^N \overline{v_t^N} dx = i\int\limits_\Omega f\overline{v_t^N} dx.$$

Cộng phương trình trên với liên hợp phức của nó, sau đó lấy tích phân theo t

từ h tới T và tích phân từng phần ta được

$$
\begin{aligned}
&(-1)^m \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int_{\Omega} a_{pq}(x,T) D^q v^N(x,T) \overline{D^p v^N(x,T)} dx \\
&= (-1)^m \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int_{\Omega_h^T} \frac{\partial a_{pq}}{\partial t} D^q v^N \overline{D^p v^N} dx dt \\
&- 2\mathrm{Im}\Big(\int_{\Omega} f(x,T) \overline{v^N(x,T)} dx - \int_{\Omega_h^T} f_t \overline{v^N} dx dt \Big). \qquad (1.18)
\end{aligned}
$$

Sử dụng (1.1) và bất đẳng thức Cauchy, từ (1.18) ta có

$$
\begin{aligned}
\|v^N(\cdot,T)\|^2_{H^m(\Omega)} &\le \frac{m^\star \mu + \epsilon}{\mu_0 - \epsilon} \int_h^T \|v^N(\cdot,t)\|^2_{H^m(\Omega)} dt \\
&+ \frac{1}{\epsilon(\mu_0 - \epsilon)} \Big(\|f(\cdot,T)\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_h^T \|f_t(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)} dt \Big). \qquad (1.19)
\end{aligned}
$$

Sử dụng bất đẳng thức Gronwall, đặt $2\alpha = \dfrac{m^\star \mu + \epsilon}{\mu_0 - \epsilon}$, từ (1.19) ta suy ra

$$
\begin{aligned}
\|v^N(\cdot,T)\|^2_{H^m(\Omega)} &\le 2\alpha \int_h^T e^{2\alpha(T-t)} \Big(\|f(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_h^T \|f_s(\cdot,s)\|^2_{L_2(\Omega)} ds \Big) dt \\
&+ \frac{1}{\epsilon(\mu_0 - \epsilon)} \Big(\|f(\cdot,T)\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_h^T \|f_t(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)} dt \Big). \qquad (1.20)
\end{aligned}
$$

Nhân hai vế của phương trình này với $e^{-2\gamma T}$ rồi lấy tích phân theo biến T từ

h đến ∞, ta được

$$\|v^N\|^2_{H^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \leq \frac{1}{\epsilon(\mu_0-\epsilon)}\int\limits_h^\infty e^{-2\gamma T}\|f(\cdot,T)\|^2_{L_2(\Omega)}dT$$
$$+\frac{1}{\epsilon(\mu_0-\epsilon)}\int\limits_h^\infty e^{-2\gamma T}\int\limits_h^T \|f_t(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}dtdT$$
$$+2\alpha\int\limits_h^\infty e^{-2\gamma T}\int\limits_h^T e^{2\alpha(T-t)}\|f(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}dtdT$$
$$+2\alpha\int\limits_h^\infty e^{-2\gamma T}\int\limits_h^T e^{2\alpha(T-t)}\int\limits_h^t \|f_s(\cdot,s)\|^2_{L_2(\Omega)}dsdtdT. \tag{1.21}$$

Kí hiệu các số hạng thứ nhất, thứ hai, thứ ba và thứ tư trong vế phải của (1.21) lần lượt là I, II, III, IV. Ta sẽ đánh giá các số hạng này.

Đầu tiên, ta có

$$I = \frac{1}{\epsilon(\mu_0-\epsilon)}\|f\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)},$$

và

$$II = \frac{1}{\epsilon(\mu_0-\epsilon)}\int\limits_h^\infty \|f_t(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\int\limits_t^\infty e^{-2\gamma T}dTdt = \frac{1}{2\gamma\epsilon(\mu_0-\epsilon)}\|f_t\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)}.$$

Vì $\inf\limits_{0<\epsilon<\mu_0}\dfrac{m^\star\mu+\epsilon}{\mu_0-\epsilon} = \dfrac{m^\star\mu}{\mu_0} = 2\gamma_0$, với mọi $\gamma > \gamma_0$, nên ta có thể chọn $\epsilon > 0$ sao cho $2\alpha = \dfrac{m^\star\mu+\epsilon}{\mu_0-\epsilon} < 2\gamma$. Tiếp theo, số hạng thứ ba có thể đánh giá như sau

$$III = 2\alpha\int\limits_h^\infty e^{-2\alpha t}\|f(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\int\limits_t^\infty e^{2(\alpha-\gamma)T}dTdt = \frac{\alpha}{\gamma-\alpha}\|f\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)}.$$

Cuối cùng, số hạng thứ tư có thể đánh giá là

$$IV = 2\alpha\int\limits_h^\infty \|f_s(\cdot,s)\|^2_{L_2(\Omega)}\int\limits_s^\infty e^{-2\alpha t}\int\limits_t^\infty e^{2(\alpha-\gamma)T}dTdtds = \frac{\alpha}{2\gamma(\gamma-\alpha)}\|f_t\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)}.$$

Do đó từ (1.21) ta có

$$\|v^N\|^2_{H^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \le C\Big[\|f\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)} + \|f_t\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)}\Big], \tag{1.22}$$

trong đó hằng số C không phụ thuộc vào h, N.

Từ bất đẳng thức này, bằng cách trích ra dãy con hội tụ yếu, ta suy ra dãy $\{v^N\}_{N=1}^\infty$ chứa một dãy con hội tụ yếu tới $v \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)$ là nghiệm suy rộng của bài toán (1.10)-(1.12). Hơn nữa, từ (1.22) ta suy ra đánh giá (1.14) được chứng minh. □

Nhận xét 1.2.3. Khác với các kết quả đã có về sự tồn tại nghiệm của bài toán biên ban đầu đối với hệ phương trình Schrödinger hay hệ phương trình parabolic, hyperbolic (chẳng hạn trong [3], [5], [6],...), trong định lí này, chúng tôi cần thu được hằng số C trong ước lượng (1.14) không phụ thuộc vào thời điểm ban đầu h để có thể tiến qua giới hạn, chỉ ra dãy $\{u^h\}$ hội tụ tới hàm u là nghiệm của bài toán (1.2)-(1.3). Do đó chúng tôi không thể sử dụng các kết quả đã có trước đây đối với bài toán biên ban đầu cho hệ phương trình Schrödinger trong miền có điểm nón mà phải đặt điều kiện phù hợp cho ngoại lực f và khắc phục khó khăn trên bằng cách đánh giá chặt hơn. Lược đồ này cũng có thể sử dụng để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm cho bài toán biên không có điều kiện ban đầu đối với hệ parabolic, hệ hyperbolic trong miền có điểm kì dị.

1.3. Sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu

1.3.1. Tính duy nhất nghiệm

Định lí 1.2. *Giả sử*

i) $\sup\left\{|\dfrac{\partial a_{pq}}{\partial t}| : (x,t) \in \Omega_h^\infty,\ 0 \le |p|, |q| \le m\right\} = \mu < \infty;$

ii) $|\dfrac{\partial a_{pq}}{\partial t}| = o(e^{2\gamma t})$ *khi* $t \to -\infty$ *với mọi* $|p|, |q| \le m$.

Khi đó bài toán (1.2)-(1.3) *có không quá một nghiệm suy rộng với* $\gamma > 0$ *bất kì.*

Chứng minh. Giả sử $u_1(x,t)$ và $u_2(x,t)$ là hai nghiệm suy rộng của bài toán (1.2)-(1.3), kí hiệu $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Với mọi $T > 0$, $b \le T$, đặt

$$\eta(x,t) = \begin{cases} \int\limits_b^t u(x,\tau)d\tau, & -\infty \le t \le b, \\ 0, & b \le t \le T, \end{cases}$$

thì $\eta(x,T) = 0$ và $\eta_t(x,t) = u(x,t)$, $-\infty \le t \le b$. Hơn nữa ta có

$$\begin{aligned} |D^p\eta(x,t)|^2 &\le \int\limits_{-\infty}^{T} e^{-2\gamma t}|D^p u(x,t)|^2 dt \int\limits_{-\infty}^{T} e^{2\gamma t}dt \\ &\le C \int\limits_{-\infty}^{T} e^{-2\gamma t}|D^p u(x,t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega^T_{-\infty}} e^{2\gamma t}|D^p\eta(x,t)|^2 dxdt &\le C \int\limits_{\Omega^T_{-\infty}} e^{2\gamma t} \int\limits_{-\infty}^{T} e^{-2\gamma\tau}|D^p u(x,\tau)|^2 d\tau dxdt \\ &\le C_1 \int\limits_{\Omega^T_{-\infty}} e^{-2\gamma t}|D^p u(x,t)|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Hơn nữa, do $\eta_t(x,t) = u(x,t)$ nên

$$\int\limits_{\Omega^T_{-\infty}} e^{2\gamma t}|D^p\eta(x,t)|^2 dxdt \le C \int\limits_{\Omega^T_{-\infty}} e^{-2\gamma t}|D^p u(x,t)|^2 dxdt.$$

Vì vậy $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}(\gamma, \Omega^T_{-\infty})$.

Từ định nghĩa của nghiệm suy rộng, ta có

$$(-1)^m \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int\limits_{\Omega^b_{-\infty}} a_{pq} D^p\eta_t \overline{D^q\eta} dxdt + i \int\limits_{\Omega^b_{-\infty}} |\eta_t|^2 dxdt = 0. \tag{1.23}$$

Cộng vế với vế của đẳng thức (1.23) với liên hợp phức của nó ta được

$$(-1)^m \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int\limits_{\Omega^b_{-\infty}} a_{pq} \frac{\partial(D^p\eta\overline{D^q\eta})}{\partial t} dxdt = 0.$$

Điều này dẫn tới

$$\begin{aligned} &- \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int\limits_{\Omega^b_{-\infty}} \frac{\partial a_{pq}}{\partial t} D^p\eta\overline{D^q\eta} dxdt \\ &= \lim_{\tau\to-\infty} \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int\limits_b^\tau \int\limits_\Omega a_{pq}(x,\tau) D^p\eta(x,\tau)\overline{D^q\eta(x,\tau)} dxd\tau. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Do giả thiết i) và ii) nên tồn tại hằng số dương μ_1 sao cho với mọi $t \in (-\infty, b)$ ta có $|\frac{\partial a_{pq}}{\partial t}| < \mu_1 e^{2\gamma t}$. Sử dụng giả thiết của Định lí 1.2 và bất đẳng thức Cauchy, vế trái của (1.24) có thể đánh giá như sau

$$\begin{aligned} \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int\limits_{\Omega^b_{-\infty}} \frac{\partial a_{pq}}{\partial t} D^p\eta\overline{D^q\eta} dxdt &\le \mu_1 \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int\limits_{\Omega^b_{-\infty}} |D^q\eta\overline{D^p\eta}| e^{2\gamma t} dxdt \\ &\le \frac{\mu_1}{2} \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int\limits_{\Omega^b_{-\infty}} \big(|D^q\eta|^2 e^{2\gamma t} + |\overline{D^p\eta}|^2 e^{2\gamma t}\big) dxdt \\ &\le \mu_1 m^\star \|\eta\|^2_{H^{m,0}(\gamma,\Omega^b_{-\infty})}. \end{aligned}$$

Từ (1.1) ta có

$$B(\tau,\eta,\eta) = \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int\limits_\Omega a_{pq}(x,\tau) D^p\eta(x,\tau)\overline{D^q\eta(x,\tau)} dx \ge \mu_0 \|\eta(\cdot,\tau)\|^2_{H^m(\Omega)},$$

vì vậy

$$\lim_{\tau\to-\infty} \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int\limits_\Omega a_{pq}(x,\tau) D^p\eta(x,\tau)\overline{D^q\eta(x,\tau)} dx \ge \mu_0 \lim_{\tau\to-\infty} \|\eta(\cdot,\tau)\|^2_{H^m(\Omega)}.$$

Từ đánh giá trên ta có

$$\lim_{\tau\to-\infty} \|\eta(\cdot,\tau)\|^2_{H^m(\Omega)} \le C\|\eta\|^2_{H^{m,0}(\gamma,\Omega^b_{-\infty})}. \tag{1.25}$$

Nếu ta đặt

$$v_p(x,t) = \int\limits_t^{-\infty} D^p u(x,\tau)d\tau,\ -\infty \le t \le b,$$

thì

$$D^p\eta(x,t) = \int\limits_b^t D^p u(x,\tau)d\tau = v_p(x,b) - v_p(x,t).$$

Thay vào (1.25), chú ý rằng $\lim\limits_{\tau\to-\infty} v_p(x,t) = 0$, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{|p|=0}^m \int\limits_\Omega |v_p(x,b)|^2dx &\le C\sum_{|p|=0}^m \int\limits_{\Omega^b_{-\infty}} e^{2\gamma t}|D^p\eta(x,t)|^2dxdt\\ &\le 2C\sum_{|p|=0}^m \int\limits_{\Omega^b_{-\infty}} e^{2\gamma t}\big(|v_p(x,b)|^2 + |v_p(x,t)|^2\big)dxdt\\ &\le Ce^{2\gamma b}\sum_{|p|=0}^m \int\limits_\Omega |v_p(x,b)|^2dx + C\sum_{|p|=0}^m \int\limits_{\Omega^b_{-\infty}} e^{2\gamma t}|v_p(x,t)|^2dxdt.\end{aligned}$$

Tiếp theo, nếu ta đặt

$$J(t) = \sum_{|p|=0}^m \int\limits_\Omega |v_p(x,t)|^2dx,$$

thì

$$(1 - Ce^{2\gamma b})J(b) \le C\int\limits_{-\infty}^b e^{2\gamma t}J(t)dt.$$

Vì vậy

$$J(b) \le 2C\int\limits_{-\infty}^b e^{2\gamma t}J(t)dt,\ \forall b \in (-\infty, \frac{1}{2\gamma}\ln\frac{1}{2C}],$$

trong đó hằng số C chỉ phụ thuộc vào μ và μ_0.

Sử dụng Bổ đề 1.3, ta có

$$J(t) \equiv 0 \text{ trong } (-\infty, \frac{1}{2\gamma}\ln\frac{1}{2C}].$$

Từ đó ta nhận được $u(x,t) = 0$ với hầu khắp $t \in (-\infty, \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1}{2C}]$. Do tính duy nhất của nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu (1.10)-(1.12) nên ta suy ra $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ với hầu khắp $t \in \mathbb{R}$. □

1.3.2. Sự tồn tại nghiệm suy rộng của bài toán không có điều kiện ban đầu

Định lí 1.3. *Giả sử rằng $\gamma > \gamma_0 = \frac{m^\star \mu}{2\mu_0}$ với $m^\star$ là số các bộ đa chỉ số có cấp không vượt quá m. Hơn nữa, giả sử rằng tồn tại hằng số dương μ sao cho*

i) $\sup\left\{ |\frac{\partial a_{pq}}{\partial t}| : (x,t) \in Q,\ 0 \le |p|, |q| \le m \right\} = \mu < \infty;$

ii) $|\frac{\partial a_{pq}}{\partial t}| = o(e^{2\gamma t})$ *khi* $t \to -\infty$ *với mọi* $|p|, |q| \le m$ *và với mọi* $x \in \Omega$;

iii) $f, f_t \in L_2(-\gamma, Q)$.

Khi đó, tồn tại (và do đó là duy nhất theo Định lí 1.2) nghiệm suy rộng $u(x,t) \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ của bài toán (1.2)-(1.3) *thỏa mãn ước lượng tiên nghiệm sau*

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma,Q)} \le C\left[\|f\|^2_{L_2(-\gamma,Q)} + \|f_t\|^2_{L_2(-\gamma,Q)} \right].$$

Chứng minh. Ý tưởng để chứng minh sự tồn tại nghiệm suy rộng của bài toán (1.2)-(1.3) là ta xây dựng dãy nghiệm xấp xỉ là nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu tương ứng (1.10)-(1.12).

Ta biết rằng tồn tại một hàm trơn $\chi(t)$ nhận giá trị bằng 1 trên $[1, \infty)$, nhận giá trị bằng 0 trên $(-\infty, 0]$ và nhận giá trị trong đoạn $[0,1]$ trên $[0,1]$ (xem thêm trong [57, Định lí 5.5]). Hơn nữa, ta có thể giả sử tất cả các đạo hàm của $\chi(t)$ là bị chặn. Giả sử $h \in (-\infty, 0]$ là một số nguyên. Đặt $f^h(x,t) = \chi(t-h) f(x,t)$ thì ta có

$$f^h(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & \text{nếu } t \ge h+1; \\ 0, & \text{nếu } t \le h. \end{cases}$$

Hơn nữa, nếu $f, f_t \in L_2(-\gamma, Q)$ thì $f^h, f_t^h \in L_2(-\gamma, Q)$ và

$$\|f^h\|^2_{L_2(-\gamma,Q)} \leq \|f\|^2_{L_2(-\gamma,Q)}, \tag{1.26}$$

$$\|f_t^h\|^2_{L_2(-\gamma,Q)} \leq C\big(\|f_t\|^2_{L_2(-\gamma,Q)} + \|f\|^2_{L_2(-\gamma,Q)}\big), \tag{1.27}$$

trong đó hằng số C không phụ thuộc vào f, h.

Giả sử rằng các nghiệm suy rộng u^h và u^k của bài toán (1.10)- (1.12) trong các hình trụ Ω_h^∞ và Ω_k^∞ với $f(x,t)$ được thay bởi $f^h(x,t)$ và $f^k(x,t)$. Với $h > k$, ta coi rằng $u^h \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, \Omega_k^\infty)$ trong đó $u^h(x,t) = 0$, $\forall k \leq t \leq h$.

Nếu ta đặt $u^{kh}(x,t) = u^k(x,t) - u^h(x,t)$ thì $u^{kh}(x,t)$ là nghiệm suy rộng của bài toán (1.10)- (1.12) trong hình trụ Ω_k^∞ với $f(x,t)$ được thay bởi $f^{kh}(x,t) = f^k(x,t) - f^h(x,t)$. Áp dụng (1.14), ta có

$$\begin{aligned}\|u^{kh}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma,Q)} &= \|u^{kh}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma,\Omega_k^\infty)}\\ &\leq C\Big(\|f^h - f^k\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_k^\infty)} + \|f_t^h - f_t^k\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_k^\infty)}\Big).\end{aligned}$$

Vì

$$\begin{aligned}\|f^h - f^k\|^2_{L_2(-\gamma,Q)} = \|f^h - f^k\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_k^\infty)} &= \int_k^{h+1} e^{-2\gamma t}\|f^h - f^k\|^2_{L_2(\Omega)}dt\\ &= \int_k^{h+1} e^{-2\gamma t}|\chi(t-h) - \chi(t-k)|.\|f\|^2_{L_2(\Omega)}dt\\ &\leq 2\int_k^{h+1} e^{-2\gamma t}\|f\|^2_{L_2(\Omega)}dt,\end{aligned}$$

và do $f \in L_2(-\gamma, Q)$ nên $\lim \int_k^{h+1} e^{-2\gamma t}\|f\|^2_{L_2(\Omega)}dt = 0$ khi $h, k \to -\infty$. Vì vậy $\lim \|f^h - f^k\|^2_{L_2(-\gamma,Q)} = 0$ khi $h, k \to -\infty$. Lặp lại các lập luận ở trên, tương tự ta cũng có $\lim \|f_t^h - f_t^k\|^2_{L_2(-\gamma,Q)} = 0$ khi $h, k \to -\infty$. Điều này dẫn tới $\{u^h\}_{h=0}^{-\infty}$ là một dãy Cauchy và do đó tồn tại một hàm $u \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ sao cho u^h hội tụ tới hàm u trong $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$.

Ta đi chứng minh u là nghiệm của bài toán (1.2)-(1.3).
Thật vậy, $u^h \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ và thỏa mãn đẳng thức tích phân sau

$$(-1)^{m-1} i \int_h^T B(t, u^h, \eta) dt + \int_{\Omega_h^T} u^h \overline{\eta_t} dx dt = \int_{\Omega_h^T} f^h \overline{\eta} dx dt, \tag{1.28}$$

với mọi $T > 0$, $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}(\gamma, \Omega_h^\infty)$, $\eta(x,t) = 0$ và với mọi $t \geq T$.
Vì $u^h(x,t) = 0$, $f^h(x,t) = 0$ với mọi $t \leq h$ nên từ (1.28) ta có

$$(-1)^{m-1} i \int_{-\infty}^T B(t, u^h, \eta) dt + \int_{\Omega_{-\infty}^T} u^h \overline{\eta_t} dx dt = \int_{\Omega_{-\infty}^T} f \overline{\eta} dx dt, \tag{1.29}$$

với mọi $T > 0$, $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}(\gamma, Q)$, $\eta(x,t) = 0$ và với mọi $t \geq T$.
Lấy $f(x,t) \in L_2(-\gamma, Q)$, cho $h \to -\infty$, đẳng thức (1.29) trở thành

$$(-1)^{m-1} i \int_{-\infty}^T B(t, u, \eta) dt + \int_{\Omega_{-\infty}^T} u \overline{\eta_t} dx dt = \int_{\Omega_{-\infty}^T} f \overline{\eta} dx dt, \tag{1.30}$$

với mọi $T > 0$, $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}(\gamma, Q)$, $\eta(x,t) = 0$ và với mọi $t \geq T$.
Tức là $u(x,t)$ là một nghiệm suy rộng của bài toán (1.2)-(1.3). □

1.4. Kết luận Chương 1

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu tính giải được duy nhất của bài toán biên Dirichlet không có điều kiện ban đầu đối với hệ phương trình Schrödinger. Các kết quả đạt được bao gồm:

- Chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm và xây dựng ước lượng tiên nghiệm của bài toán biên ban đầu thứ nhất đối với hệ phương trình Schrödinger với điều kiện ban đầu $t = h$. Hơn nữa, chúng tôi còn chỉ ra rằng hằng số C trong các ước lượng tiên nghiệm là đều theo h. Từ đó, chúng tôi có thể tiến qua giới hạn khi $h \to -\infty$ để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu.

- Chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán biên Dirichlet không có điều kiện ban đầu đối với hệ phương trình Schrödinger.

Ta thấy rằng, kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán (1.2)-(1.3) không chỉ đúng khi miền Ω chứa điểm nón mà còn đúng cho miền Ω tùy ý.

Chương 2

TÍNH TRƠN CỦA NGHIỆM

Mục đích của chương này là chỉ ra các kết quả về tính trơn theo biến thời gian và tính trơn theo cả hai biến thời gian - không gian của nghiệm của bài toán (1.2)-(1.3). Trước tiên, ta sẽ chỉ ra các kết quả về tính trơn của bài toán có điều kiện ban đầu tương ứng (1.10)-(1.12). Sau đó, dựa trên việc các hằng số C trong các ước lượng nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu $t = h$ đều không phụ thuộc vào h, ta có thể tiến qua giới hạn và thu được các kết quả về tính trơn của bài toán (1.2)-(1.3). Lưu ý rằng ở đây, ta không thể áp dụng các kết quả đã có về tính trơn của nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu đối với hệ phương trình Schrödinger mạnh trong miền có điểm nón. Nguyên nhân là do trong các kết quả đã có, hằng số C trong các đánh giá của nghiệm thay đổi khi điều kiện ban đầu thay đổi. Các kết quả chính của chương này là Định lí 2.3 và Định lí 2.4. Nội dung chính của chương này được viết dựa trên bài báo số 2 trong danh mục công trình của tác giả.

2.1. Tính trơn của nghiệm theo biến thời gian của bài toán có điều kiện ban đầu

Trong tài liệu tham khảo [26], tính trơn theo biến thời gian của nghiệm của bài toán (1.10)-(1.12) đã được chứng minh khi $h = 0$ và $f_{t^k} \in L^\infty(0, \infty; L_2(\Omega))$. Tuy nhiên ở mục này ta không thể sử dụng kết quả đó do các hằng số C trong các ước lượng nghiệm phụ thuộc vào thời điểm ban đầu h. Trong mục này, ta sẽ xem xét bài toán trong trường hợp h tùy ý và $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, \Omega_h^\infty)$. Hơn nữa, ta sẽ chỉ ra hằng số C trong các ước lượng tiên nghiệm không phụ thuộc vào

thời điểm ban đầu h.

Định lí 2.1. *Giả sử rằng $l \in \mathbb{N}$ và tồn tại $\mu > 0$, $\mu_2 > 0$ sao cho*

i) $\sup\left\{|\dfrac{\partial a_{pq}}{\partial t}| : (x,t) \in Q,\ 0 \le |p|, |q| \le m\right\} = \mu < \infty;$
$|\dfrac{\partial^k a_{pq}}{\partial t^k}| \le \mu_2$ *với* $2 \le k \le l+1$;

ii) $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, \Omega_h^\infty)$ *với* $0 \le k \le l+1$, $f_{t^k}(x,h) = 0$ *với mọi* $x \in \Omega$ *và* $0 \le k \le l$.

Khi đó với mọi $\gamma > (2l+1)\gamma_0$, nghiệm $v \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ của bài toán (1.10)-(1.12) *có các đạo hàm theo biến t tới cấp l thỏa mãn $v_{t^k} \in H^{m,0}(-\gamma, \Omega_h^\infty)$, với mọi $k = 0, \ldots, l$ và thỏa mãn ước lượng*

$$\|v_{t^k}\|^2_{H^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \le C \sum_{j=0}^{k+1} \|f_{t^j}\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)}, \tag{2.1}$$

trong đó hằng số C không phụ thuộc vào v, f, h.

Chứng minh. Giả sử $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn của $H^m(\Omega)$ và trực giao trong $L_2(\Omega)$. Với bất kì $N \in \mathbb{N}$, ta tìm nghiệm xấp xỉ ở dạng như sau $v^N(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{N} C_k^N(t)\varphi_k(x)$, trong đó $\{C_k^N(t)\}_{k=1}^N$ là nghiệm của hệ phương trình vi phân

$$(-1)^{m-1} iB(t, v^N, \varphi_k) - \int\limits_\Omega v_t^N \overline{\varphi_k} dx = \int\limits_\Omega f\overline{\varphi_k} dx, \tag{2.2}$$

$$C_k^N(h) = 0,\ k = 1, \ldots, N. \tag{2.3}$$

Từ giả thiết, ta suy ra các hệ số $C_k^N(t)$ xác định duy nhất bởi (2.2)-(2.3), có đạo hàm tới cấp $l+1$ và thỏa mãn $v^N(x,h) = 0$. Dễ dàng kiểm tra được $D^p v^N(x,h) = 0$, $\forall 0 \le |p| \le m$, $x \in \Omega$.

* Bước 1: Ta chứng minh $D^p v_{t^k}^N(x,h) = 0$ với mọi p thỏa mãn $0 \le k \le l$, $x \in \Omega$ và với mọi $0 \le |p| \le m$. Đạo hàm $(k-1)$ lần theo biến t hai vế của

(2.2) rồi nhân hai vế của phương trình thu được với $\dfrac{d^k}{dt^k}\overline{(C_k^N(t))}$ và lấy tổng theo k từ 1 đến N, ta có

$$-i\int\limits_{\Omega}|v_{t^k}^N|^2dx+(-1)^m\sum_{|p|,|q|=0}^{m}\int\limits_{\Omega}a_{pq}D^qv_{t^{k-1}}^N\overline{D^pv_{t^k}^N}dx=i\int\limits_{\Omega}f_{t^{k-1}}\overline{v_{t^k}^N}dx$$
$$+(-1)^{m-1}\sum_{|p|,|q|=0}^{m}\sum_{s=0}^{k-2}\binom{k-1}{s}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial^{k-s-1}a_{pq}}{\partial t^{k-s-1}}D^qv_{t^s}^N\overline{D^pv_{t^{k-s-1}}^N}dx. \tag{2.4}$$

Vì $f_{t^k}(x,h)=0$ với mọi $x\in\Omega$, $0\le k\le l-1$, nên sử dụng giả thiết quy nạp theo k, từ (2.4) ta suy ra $D^pv_{t^k}^N(x,h)=0$ với mọi $0\le k\le l$ và với mọi p thỏa mãn $0\le|p|\le m$, $x\in\Omega$.

* Bước 2: Xây dựng ước lượng tiên nghiệm cho $v_{t^k}^N$. Với $k=l+1$, cộng hai vế của đẳng thức (2.4) với liên hợp phức của nó, sau đó lấy tích phân theo t từ h đến τ rồi lấy tích phân từng phần, ta được

$$(-1)^mB(\tau,v_{t^{l+1}}^N(x,\tau),v_{t^l}^N(x,\tau))=(-1)^m\sum_{|p|,|q|=0}^{m}\int\limits_{\Omega_h^\tau}\frac{\partial a_{pq}}{\partial t}D^qv_{t^l}^N\overline{D^pv_{t^l}^N}dxdt$$
$$+(-1)^m2\mathrm{Re}\sum_{|p|,|q|=0}^{m}l\int\limits_{\Omega_h^\tau}\frac{\partial a_{pq}}{\partial t}D^qv_{t^l}^N\overline{D^pv_{t^l}^N}dxdt$$
$$+(-1)^m2\mathrm{Re}\sum_{|p|,|q|=0}^{m}\sum_{s=0}^{l-1}\binom{l}{s}\int\limits_{\Omega_h^\tau}\frac{\partial^{l-s+1}a_{pq}}{\partial t^{l-s+1}}D^qv_{t^s}^N\overline{D^pv_{t^l}^N}dxdt$$
$$+(-1)^m2\mathrm{Re}\sum_{|p|,|q|=0}^{m}\sum_{s=0}^{l-2}\binom{l}{s}\int\limits_{\Omega_h^\tau}\frac{\partial^{l-s}a_{pq}}{\partial t^{l-s}}D^qv_{t^{s+1}}^N\overline{D^pv_{t^l}^N}dxdt$$
$$-(-1)^m2\mathrm{Re}\sum_{|p|,|q|=0}^{m}\sum_{s=0}^{l-1}\binom{l}{s}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial^{l-s}a_{pq}(x,\tau)}{\partial t^{l-s}}D^qv_{t^s}^N(x,\tau)\overline{D^pv_{t^l}^N(x,\tau)}dx$$
$$+2\mathrm{Im}\int\limits_{\Omega}f_{t^l}(x,\tau)\overline{v_{t^l}^N(x,\tau)}dx-2\mathrm{Im}\int\limits_{\Omega_h^\tau}f_{t^{l+1}}\overline{v_{t^l}^N}dxdt. \tag{2.5}$$

Kí hiệu các số hạng trong vế phải của (2.5) lần lượt là I, II, III, IV,V,VI. Ta sẽ đi đánh giá từng số hạng này. Trước tiên, sử dụng bất đẳng thức Cauchy,

với mọi $\epsilon_1 > 0$ ta có

$$I \leq \frac{\mu}{2} \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int_{\Omega_h^\tau} \left(|D^q v_{t^l}^N|^2 + |D^p v_{t^l}^N|^2\right) dxdt = \mu m^\star \int_h^\tau ||v_{t^l}^N(\cdot,t)||^2_{H^m(\Omega)} dt,$$

$$II \leq 2l\mu m^\star \int_h^\tau ||v_{t^l}^N(\cdot,t)||^2_{H^m(\Omega)} dt,$$

$$III \leq \mu_2 m^\star (2^l - 1)\epsilon_1 \int_h^\tau ||v_{t^l}^N(\cdot,t)||^2_{H^m(\Omega)} dt + C_1 \sum_{s=0}^{l-1} \int_h^\tau ||v_{t^s}^N(\cdot,t)||^2_{H^m(\Omega)} dt,$$

$$IV \leq \mu_2 m^\star (2^l - l - 1)\epsilon_1 \int_h^\tau ||v_{t^l}^N(\cdot,t)||^2_{H^m(\Omega)} dt + C_1 \sum_{s=0}^{l-1} \int_h^\tau ||v_{t^s}^N(\cdot,t)||^2_{H^m(\Omega)} dt,$$

$$V \leq \mu_2 m^\star (2^l - 1)\epsilon_1 ||v_{t^s}^N(\cdot,\tau)||^2_{H^m(\Omega)} + C_1 \sum_{s=0}^{l-1} ||v_{t^s}^N(\cdot,\tau)||^2_{H^m(\Omega)},$$

$$VI \leq C_1 \left(||f_{t^l}(\cdot,\tau)||^2_{L_2(\Omega)} + \int_h^\tau ||f_{t^{l+1}}(\cdot,t)||^2_{L_2(\Omega)} dt \right)$$

$$+ \epsilon_1 \left(||v_{t^l}^N(\cdot,\tau)||^2_{H^m(\Omega)} + \int_h^\tau ||v_{t^l}^N(\cdot,t)||^2_{H^m(\Omega)} dt \right),$$

ở đó $C_1 = \max\{\frac{\mu m^\star M}{\epsilon_1}, \frac{1}{\epsilon_1}\}$, $M = \max\limits_{s=0,\ldots,l-1} \binom{l}{s}$.
Kí hiệu $\epsilon = [(2^{l+1} - 2 - l)\mu m^\star + 1]\epsilon_1 > 0$ với $l > 0$, thì với mọi $0 < \epsilon < \mu_0$, sử dụng những đánh giá trên và (2.5), ta thu được

$$\begin{aligned} ||v_{t^l}^N(\cdot,\tau)||^2_{H^m(\Omega)} &\leq \alpha_l \int_h^\tau ||v_{t^l}^N(\cdot,t)||^2_{H^m(\Omega)} dt \\ &+ C \sum_{k=0}^{l-1} ||v_{t^k}^N(\cdot,\tau)||^2_{H^m(\Omega)} + C \sum_{k=0}^{l-1} \int_h^\tau ||v_{t^k}^N(\cdot,t)||^2_{H^m(\Omega)} dt \\ &+ C||f_{t^l}(\cdot,\tau)||^2_{L_2(\Omega)} + C \int_h^\tau ||f_{t^{l+1}}(\cdot,t)||^2_{L_2(\Omega)} dt, \end{aligned} \tag{2.6}$$

trong đó C là một hằng số dương không phụ thuộc vào h và $\alpha_l = \dfrac{(2l+1)\mu m^\star + \epsilon}{\mu_0 - \epsilon}$.

Mặt khác, từ (1.20) ta có đánh giá sau

$$||v^N(\cdot,\tau)||^2_{H^m(\Omega)} \leq 2\alpha \int\limits_h^\tau e^{2\alpha(\tau-t)}\big(||f(\cdot,t)||^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_h^\tau ||f_s(\cdot,s)||^2_{L_2(\Omega)}ds\big)dt$$

$$+ C\bigg(||f(\cdot,\tau)||^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_h^\tau ||f_t(\cdot,t)||^2_{L_2(\Omega)}dt\bigg). \tag{2.7}$$

Nhân hai vế của (2.7) với $e^{-2\gamma\tau}$, rồi lấy tích phân theo biến τ từ h tới ∞, ta được

$$||v^N||^2_{H^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \leq C\big(||f||^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)} + ||f_t||^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)}\big), \tag{2.8}$$

trong đó hằng số C không phụ thuộc vào h.

Sử dụng (2.6) cho trường hợp $l = 1$, áp dụng Bổ đề Gronwall và (2.8) ta có

$$||v_t^N||^2_{H^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \leq C\bigg(||f_t||^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)} + ||f_{t^2}||^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)} + ||v^N||^2_{H^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)}\bigg)$$

$$+ C\int\limits_h^\infty e^{-2\gamma\tau}\int\limits_h^\tau e^{\alpha_1(\tau-t)}\big(||v^N(\cdot,t)||^2_{H^m(\Omega)} + ||f_t(\cdot,t)||^2_{L_2(\Omega)}\big)dtd\tau$$

$$+ C\int\limits_h^\infty e^{-2\gamma\tau}\int\limits_h^\tau e^{\alpha_1(\tau-t)}\int\limits_h^t \big(||v^N(\cdot,s)||^2_{H^m(\Omega)} + ||f_{t^2}(\cdot,s)||^2_{L_2(\Omega)}\big)dsdtd\tau. \tag{2.9}$$

Chú ý rằng

$$\inf_{\mu_0>\epsilon>0} 2\alpha_1 = \inf_{\mu_0>\epsilon>0} \frac{3\mu m^\star + \epsilon}{\mu_0 - \epsilon} = 6\gamma_0 < 2\gamma,$$

nên ta có thể chọn ϵ đủ nhỏ sao cho $\alpha_1 < \gamma$. Do (2.9), sử dụng Định lí Fubini, ta có

$$||v_t^N||^2_{H^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \leq \sum_{k=0}^{2} ||f_{t^k}||^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)} + ||v^N||^2_{H^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)}.$$

Điều này dẫn tới

$$||v_t^N||^2_{H^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \leq C\sum_{k=0}^{2} ||f_{t^k}||^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)}. \tag{2.10}$$

Lặp lại các lập luận trên, từ (2.6) ta có thể chứng minh với l tùy ý, nếu $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, \Omega_h^\infty)$, $k = 0, \ldots, l+1$, thì v^N có đạo hàm riêng theo biến t tới cấp l và với mọi $k = 0, \ldots, l$ thì

$$||v_{t^k}^N||^2_{H^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \leq C \sum_{j=0}^{k+1} ||f_{t^j}||^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)}. \tag{2.11}$$

Từ bất đẳng thức (2.11), ta suy ra dãy $\{v_{t^k}^N\}$ bị chặn đều trong $H^{m,0}(-\gamma, \Omega_h^\infty)$. Bằng cách trích ra dãy con hội tụ yếu, ta suy ra dãy $\{v_{t^k}^N\}_{N=1}^\infty$ chứa một dãy con hội tụ yếu tới hàm v_{t^k} trong không gian $H^{m,0}(-\gamma, \Omega_h^\infty)$. Hơn nữa, từ (2.11), ta suy ra đánh giá (2.1) được chứng minh. □

2.2. Tính trơn theo tập hợp các biến của nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu

Trong phần này ta đi xét sự ảnh hưởng của biên của miền Ω lên bài toán đang xét, nên không mất tính tổng quát, từ đây trở về sau, ta giả sử các hệ số của toán tử vi phân $L(x, t, D)$ là khả vi vô hạn trong $\overline{Q}$, thỏa mãn điều kiện i) của Định lí 1.2; điều kiện i), ii) của Định lí 1.3 và hơn nữa a_{pq} cùng với các đạo hàm $D^\alpha a_{pq}$ lipschitz theo biến x đều đối với t trong lân cận của gốc tọa độ O.

Giả sử ω là hệ tọa độ cực trên S^{n-1}. Hơn nữa, giả sử phần chính của toán tử $L(x, t, D)$ tại gốc tọa độ 0 có thể viết ở dạng sau

$$\mathcal{L}(t, D) = r^{-2m}\mathfrak{L}(\omega, t, rD_r, D_\omega),\ D_r = \frac{i\partial}{\partial r},$$

trong đó $\mathfrak{L}$ là toán tử tuyến tính với các hệ số trơn. Khi đó tập phổ của các toán tử tuyến tính trong hệ sau đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu tính trơn của nghiệm.

$$\mathfrak{L}(\omega, t, \lambda, D_\omega)v(\omega) = 0,\ \omega \in G, \tag{2.12}$$

$$D_\omega^j v(\omega) = 0,\ \omega \in \partial G,\ j = 0, ..., m-1. \tag{2.13}$$

Bổ đề 2.1. *Giả sử* $f, f_t, f_{tt} \in L_2(-\gamma, K_h^\infty)$, $\gamma > (4m+1)\gamma_0$ *và thỏa mãn* $f(x,h) = f_t(x,h) = 0$. *Nếu* $v(x,t)$ *là một nghiệm suy rộng của bài toán* (1.10)-(1.12) *trong không gian* $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ *sao cho* $v \equiv 0$ *khi* $|x| > R$, R *là hằng số, thì* $v \in H_m^{2m,1}(-\gamma, K_h^\infty)$ *và thỏa mãn đánh giá sau*

$$\|v\|^2_{H_m^{2m,1}(-\gamma,K_h^\infty)} \le C\big[\|f\|^2_{L_2(-\gamma,K_h^\infty)} + \|f_t\|^2_{L_2(-\gamma,K_h^\infty)} + \|f_{tt}\|^2_{L_2(-\gamma,K_h^\infty)}\big], \tag{2.14}$$

trong đó hằng số C *không phụ thuộc vào* v, f, h.

Chứng minh. Viết lại hệ phương trình (1.10) ở dạng

$$(-1)^m \sum_{|p|,|q|=0}^{m} D^p(a_{pq}(x,t)D^q v) = F, \tag{2.15}$$

trong đó $F = i(v_t + f)$. Do Định lí 2.1, ta suy ra $F \in L_2(K)$ với hầu khắp t.

Xét dãy miền

$$\Omega^k = \{x \in K : 2^{-k} \le |x| \le 2^{-k+1}\},\ k = 1, 2, \ldots$$

Chọn một miền trơn $\Omega^{2,0}$ sao cho $\Omega^2 \subset \Omega^{2,0} \subset (\Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Omega^3)$. Từ kết quả về tính trơn của nghiệm của bài toán Dirichlet đối với hệ elliptic trong miền có biên trơn, suy ra

$$\int\limits_{\Omega^{2,0}} |D^\alpha v(x,t)|^2 dx \le C \int\limits_{\Omega^{2,0}} \big(|F(x,t)|^2 + |v(x,t)|^2\big) dx,\ |\alpha| \le 2m.$$

Từ đó suy ra

$$\int\limits_{\Omega^2} |D^\alpha v(x,t)|^2 dx \le C \int\limits_{\Omega^1\cup\Omega^2\cup\Omega^3} \big(|F(x,t)|^2 + |v(x,t)|^2\big) dx,\ |\alpha| \le 2m, \tag{2.16}$$

trong đó C là hằng số.

Thay $x = \dfrac{4}{2^{k_1}} x'$ với $k_1 > 2$ vào (2.15) và sử dụng đánh giá (2.16), ta nhận được

$$\int\limits_{\Omega^2} |D^\alpha_{x'} v(x',t)|^2 dx' \le C \int\limits_{\Omega^1\cup\Omega^2\cup\Omega^3} \big(|F(x',t)|^2 (\frac{4}{2^{k_1}})^{4m} + |v(x',t)|^2\big) dx',\ |\alpha| \le 2m.$$

Quay trở lại các biến $x_1, \ldots, x_n$ ta được

$$\int\limits_{\Omega^{k_1}} |D^\alpha v(x,t)|^2 r^{2(\alpha-m)} dx$$
$$\leq C \int\limits_{\Omega^{k_1-1}\cup\Omega^{k_1}\cup\Omega^{k_1+1}} \big(|F(x,t)|^2 r^{2m} + |v(x,t)|^2 r^{-2m}\big) dx.$$

Lấy tổng các bất đẳng thức này theo mọi $k_1 > 2$ ta nhận được

$$\int\limits_{\sum\limits_{k_1>2}\Omega^{k_1}} |D^\alpha v(x,t)|^2 r^{2(\alpha-m)} dx$$
$$\leq C \int\limits_{\sum\limits_{k_1>2}\Omega^{k_1-1}\cup\Omega^{k_1}\cup\Omega^{k_1+1}} \big(|F(x,t)|^2 r^{2m} + |v(x,t)|^2 r^{-2m}\big) dx. \tag{2.17}$$

Do nghiệm v đồng nhất bằng 0 bên ngoài một lân cận của điểm nón nên từ (2.17) ta có

$$\int\limits_K |D^\alpha v(x,t)|^2 r^{2(\alpha-m)} dx \leq C \int\limits_K \big(|F(x,t)|^2 r^{2m} + |v(x,t)|^2 r^{-2m}\big) dx. \tag{2.18}$$

Từ điều kiện (1.12) ta suy ra

$$\int\limits_K |v(x,t)|^2 r^{-2m} dx \leq C \sum_{|\beta|=m} \int\limits_K |D^\beta v|^2 dx.$$

Từ đó ta có

$$\int\limits_K |D^\alpha v(x,t)|^2 dx \leq C \int\limits_K \big(|f|^2 + |v_t|^2 + \sum_{|\beta|=m} |D^\beta v|^2\big) dx.$$

Nhân hai vế bất đẳng thức này với $e^{-2\gamma t}$ rồi lấy tích phân theo t từ h tới $+\infty$ và sử dụng Định lí 2.1, ta nhận được kết luận của bổ đề. Vậy bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.2. *Lấy $v(x,t)$ là một nghiệm suy rộng của bài toán* (1.10)-(1.12), *$\gamma > (4m+1)\gamma_0$ và lấy $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, K_h^\infty)$ với $k \leq 2m+1$, $f_{t^k}(x,h) = 0$ với*

$k \leq 2m$. Giả sử rằng trong dải

$$m - \frac{n}{2} \leq Im\lambda \leq 2m - \frac{n}{2}$$

không chứa các giá trị riêng của các toán tử tuyến tính ở hệ (2.12)-(2.13) *với mọi $t \in [h, \infty)$. Khi đó $v \in H_0^{2m}(-\gamma, K_h^\infty)$ và thỏa mãn ước lượng sau*

$$\|v\|^2_{H_0^{2m}(-\gamma, K_h^\infty)} \leq C \sum_{k=0}^{2m+1} \|f_{t^k}\|^2_{L_2(-\gamma, K_h^\infty)}, \tag{2.19}$$

trong đó hằng số dương C không phụ thuộc vào v, f, h.

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh

$$\|v_{t^s}\|^2_{H_0^{2m,0}(-\gamma, K_h^\infty)} \leq C \sum_{k=0}^{2m+1} \|f_{t^k}\|^2_{L_2(-\gamma, K_h^\infty)}, \tag{2.20}$$

trong đó hằng số dương C không phụ thuộc vào h, với $s \leq 2m$.

Viết lại hệ (1.10) ở dạng

$$(-1)^m \mathcal{L}(t, D)v = F(x, t),$$

với

$$F(x, t) = i(v_t + f) + (-1)^m [\mathcal{L}(t, D) - L(x, t, D)]v.$$

Do các hệ số $a_{pq}(x, t)$ khả vi vô hạn trong Q và $v(x, t)$ có các đạo hàm suy rộng theo x đến cấp $2m$ theo Bổ đề 2.1 nên ta viết lại toán tử L ở dạng sau

$$L(x, t, D)v = \sum_{|\alpha|=0}^{2m} a_\alpha(x, t) D^\alpha v.$$

Từ đây do $v \in H_m^{2m,0}(K_h^\infty)$ và $|a_\alpha(x, t) - a_\alpha(0, t)| \leq C|x|$ với C là hằng số, ta có

$$[\mathcal{L}(t, D) - L(x, t, D)]v \in H_{m-1}^{0,0}(K_h^\infty).$$

Từ Định lí 2.1 và Bổ đề 2.1, ta suy ra $F(x, t) \in H_{m-1}^{0,0}(K_h^\infty)$. Do đó ta dẫn tới $F(\cdot, t) \in H_{m-1}^{m,0}(K)$ với hầu khắp t. Mặt khác trong dải $m - \frac{n}{2} \leq Im\lambda \leq 2m - \frac{n}{2}$

không có các điểm phổ của bài toán (2.12)-(2.13) với mọi $t \in [h, \infty)$, nên áp dụng định lí về tính trơn của nghiệm của bài toán elliptic trong miền không trơn ta suy ra $u \in H^{2m}_{m-1}(K)$ với hầu khắp $t \in [h, \infty)$ và

$$\|v\|^2_{H^{2m}_{m-1}(K)} \leq C\big[\|f\|^2_{L_2(K)} + \|v_t\|^2_{L_2(K)} + \|v\|^2_{H^{2m}_m(K)}\big],$$

trong đó C là hằng số. Lặp lại các lí luận như trên ta được

$$\|v\|^2_{H^{2m}_0(K)} \leq C\big[\|f\|^2_{L_2(K)} + \|v_t\|^2_{L_2(K)} + \|v\|^2_{H^{2m}_m(K)}\big],$$

với hầu khắp $t \in [h, \infty)$ và C là hằng số.

Nhân hai vế của bất đẳng thức này với $e^{-2\gamma t}$, sau đó lấy tích phân theo t từ h đến ∞, ta thu được

$$\|v\|^2_{H^{2m,0}_0(-\gamma,K^\infty_h)} \leq C\big[\|f\|^2_{L_2(-\gamma,K^\infty_h)} + \|v_t\|^2_{L_2(-\gamma,K^\infty_h)} + \|v\|^2_{H^{2m,0}_0(-\gamma,K^\infty_h)}\big].$$

Từ (2.11) ta có

$$\|v_t\|^2_{L_2(-\gamma,K^\infty_h)} \leq C\sum_{k=0}^{2}\|f_{t^k}\|^2_{L_2(-\gamma,K^\infty_h)},$$

và do Bổ đề 2.1 ta có

$$\|v\|^2_{H^{2m,0}_0(-\gamma,K^\infty_h)} \leq \|v\|^2_{H^{2m,1}_m(-\gamma,K^\infty_h)} \leq C\sum_{k=0}^{2}\|f_{t^k}\|^2_{L_2(-\gamma,K^\infty_h)}.$$

Vì vậy

$$\|v\|^2_{H^{2m,0}_0(-\gamma,K^\infty_h)} \leq C\sum_{k=0}^{2}\|f_{t^k}\|^2_{L_2(-\gamma,K^\infty_h)}.$$

Tức là (2.20) đúng với $s = 0$.

Giả sử (2.20) đúng đến $s - 1$.

Lấy đạo hàm s lần hai vế của (1.10) theo biến t và đặt $w = v_{t^s}$, ta có

$$(-1)^{m-1}Lw = -i(w_t + f_{t^s}) + (-1)^m\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}L_{t^k}v_{t^{s-k}},$$

trong đó $L_{t^k} = \sum\limits_{|p|,|q|=0}^{m} D^p(\frac{\partial^k a_{pq}}{\partial t^k} D^q)$. Từ giả thiết quy nạp và lặp lại các chứng minh trong trường hợp $s = 0$, thì (2.20) cũng đúng với s.

Vì

$$\|v\|^2_{H_0^{2m}(-\gamma,K_h^\infty)} \leq \sum_{s=0}^{2m-1} \|v_{t^s}\|^2_{H_0^{2m,0}(-\gamma,K_h^\infty)} + \|v_{t^{2m}}\|^2_{H_0^{0,0}(-\gamma,K_h^\infty)},$$

nên từ (2.20) và Định lí 2.1, ta thu được (2.19). Bổ đề được chứng minh. □

Định lí 2.2. *Lấy l là một số nguyên không âm. Giả sử rằng $v(x,t)$ là một nghiệm yếu trong không gian $H^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)$ với $\gamma > (2(2m+l)+1)\gamma_0$ của bài toán* (1.10)-(1.12) *trong đó $f_{t^k} \in H_0^{l,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)$ với $k \leq 2m+l+1$, và $f_{t^k}(x,h) = 0$ với $k \leq 2m+l$. Hơn nữa, giả thiết rằng trong dải*

$$m - \frac{n}{2} \leq Im\lambda \leq 2m + l - \frac{n}{2}$$

không chứa điểm phổ của các toán tử tuyến tính trong hệ (2.12)-(2.13)*. Khi đó ta có $v \in H_0^{2m+l}(-\gamma,\Omega_h^\infty)$ và thỏa mãn ước lượng sau*

$$\|v\|^2_{H_0^{2m+l}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \leq C \sum_{k=0}^{2m+l+1} \|f_{t^k}\|^2_{H_0^{l,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)}, \tag{2.21}$$

trong đó hằng số C không phụ thuộc vào h.

Chứng minh. 1. Trước hết ta xét trường hợp $v \equiv 0$ ở ngoài U_0.

Ta chứng minh định lí này bằng phương pháp quy nạp theo l. Với $l = 0$, định lí được chứng minh do Bổ đề 2.2 với chú ý rằng $H_0^{0,0}(-\gamma,K_h^\infty) = L_2(-\gamma,K_h^\infty)$. Giả sử khẳng định của định lí đúng đến $l-1$, ta sẽ chứng minh nó đúng với l.

Đầu tiên ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\|v_{t^j}\|^2_{H_0^{2m+l-j}(-\gamma,K_h^\infty)} \leq C \sum_{k=0}^{2m+l+1} \|f_{t^k}\|^2_{H_0^{l,0}(-\gamma,K_h^\infty)}, \tag{2.22}$$

với mọi $j = l, l-1, ..., 0$, trong đó hằng số C không phụ thuộc vào h.

Theo giả thiết $f_{t^k} \in H_0^l(-\gamma, K_h^\infty)$ nên $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, K_h^\infty)$. Do đó lập luận tương tự như trong chứng minh Định lí 2.1, ta có $v_{t^l} \in H^{2m,0}(-\gamma, K_h^\infty)$. Do Bổ đề 2.2 nên $v_{t^l} \in H_0^{2m}(-\gamma, K_h^\infty)$. Điều này có nghĩa là (2.22) đúng với $j = l$.

Giả sử rằng (2.22) đúng với $j = l, l-1, ..., s+1$.

Từ giả thiết quy nạp suy ra $v \in H_0^{2m+l-1}(-\gamma, K_h^\infty)$, đặt $w = v_{t^s}$ thì ta có $w \in H_0^{2m+l-s-1}(-\gamma, K_h^\infty)$. Lấy đạo hàm theo biến t hai vế của (1.23) s lần ta được

$$Lw = F = -i(w_t + f_{t^s}) + \sum_{p=1}^{s} \binom{s}{p} L_{t^p} v_{t^{s-p}}, \tag{2.23}$$

trong đó $L_{t^k} = \sum\limits_{|p|,|q|=0}^{m} (-1)^{|p|} D^p (\dfrac{\partial^k a_{pq}}{\partial t^k} D^q)$. Áp dụng giả thiết quy nạp theo j và giả thiết của hàm f, ta có $w_t \in H_0^{2m+l-s-1}(-\gamma, K_h^\infty)$, $f_{t^s} \in H_0^{l-s}(-\gamma, K_h^\infty)$. Điều đó dẫn đến $F \in H_0^{l-s}(-\gamma, K_h^\infty) \subset H_{-1}^{l-s-1}(-\gamma, K_h^\infty)$. Do trong dải $2m + l - s - 1 - \dfrac{n}{2} \leq Im\lambda \leq 2m + l - s - \dfrac{n}{2}$ không chứa các điểm phổ của các toán tử tuyến tính trong hệ (2.12)-(2.13), nên sử dụng kết quả trong [51], ta có $w \in H_{-1}^{2m+l-s-1}(K)$, với hầu khắp $t \in [h, \infty)$. Vì vậy $w \in H_{-1}^{2m+l-s-1,0}(-\gamma, K_h^\infty)$. Chú ý rằng $F \in H_0^{l-s}(-\gamma, K_h^\infty)$ nên lập luận tương tự như trong chứng minh của Bổ đề 2.2 trong [26], ta được $w \in H_{-1}^{2m+l-s-1,0}(-\gamma, K_h^\infty)$ và w thỏa mãn ước lượng sau

$$\|w\|^2_{H_{-1}^{2m+l-s-1,0}(-\gamma,K_h^\infty)} \leq C\Big[\|F\|^2_{H_0^{l-s,0}(-\gamma,K_h^\infty)} + \|w\|^2_{H_{-1}^{l-s+1,0}(-\gamma,K_h^\infty)}\Big], \tag{2.24}$$

trong đó C là hằng số không phụ thuộc vào h.

Tiếp tục sử dụng giả thiết quy nạp và sử dụng (2.24), ta được

$$\|v_{t^j}\|^2_{H_0^{2m+l-j}(-\gamma,K_h^\infty)} \leq C \sum_{k=0}^{2m+l+1} \|f_{t^k}\|^2_{H_0^{l,0}(-\gamma,K_h^\infty)}. \tag{2.25}$$

Điều này có nghĩa là đánh giá (2.22) được chứng minh. Thay $j = 0$ vào (2.22), ta có (2.21). Định lí được chứng minh.

2. Trường hợp tổng quát: Chọn hàm $\varphi_0 \in C_0^\infty(U_0)$ sao cho $\varphi_0 \equiv 1$ trong

một lân cận của gốc tọa độ O. Ta định nghĩa hàm $v_0 = \varphi_0 v$, thỏa mãn hệ sau

$$(-1)^{m-1} iL(x,t,D)v_0 - (v_0)_t = \varphi_0 f + L'(x,t,D)v,$$

trong đó $L'(x,t,D)$ là toán tử tuyến tính bậc nhỏ hơn $2m$ và các hệ số của toán tử này bằng 0 ở ngoài U_0. Áp dụng trường hợp 1 của định lí ta có

$$\|v_0\|^2_{H_0^{2m+l}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \le C \sum_{k=0}^{2m+l+1} \|f_{t^k}\|^2_{H_0^{l,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)}. \tag{2.26}$$

Tách $v = v_0 + v_1$, trong đó $v_1 = (1-\varphi_0)v$. Khi đó, hàm v_1 nhận giá trị bằng 0 trong U_0, nên sử dụng kết quả quen thuộc về tính trơn của nghiệm của hệ phương trình Schrödinger trong miền trơn ta được

$$\|v_1\|^2_{H_0^{2m+l}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \le C \sum_{k=0}^{2m+l+1} \|f_{t^k}\|^2_{H_0^{l,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)}. \tag{2.27}$$

Từ bất đẳng thức (2.26) và (2.27) ta có

$$\|v\|^2_{H_0^{2m+l}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \le C \sum_{k=0}^{2m+l+1} \|f_{t^k}\|^2_{H_0^{l,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)}.$$

Do đó, định lí được chứng minh hoàn toàn. □

2.3. Tính trơn của nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu

Ta biết rằng nghiệm suy rộng u của bài toán không có điều kiện ban đầu (1.2)-(1.3) được xấp xỉ bởi dãy các nghiệm u^h của bài toán có điều kiện ban đầu tương ứng.

Từ đánh giá (2.21) ta có

$$\|u^{jh}_{t^k}\|^2_{H^{m,0}(-\gamma,\Omega_j^\infty)} = \|u^{jh}_{t^k}\|^2_{H^{m,0}(-\gamma,Q)} \le C \sum_{s=0}^{k+1} \|f^{jh}_{t^s}\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_j^\infty)}.$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}\|f^{jh}\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_j^\infty)} &= \int\limits_j^{h+1} e^{-2\gamma t}\|f^h - f^j\|^2_{L_2(\Omega)}dt \\ &= \int\limits_j^{h+1} e^{-2\gamma t}|\chi(t-h)-\chi(t-j)|\|f\|^2_{L_2(\Omega)}dt \\ &\le 2\int\limits_j^{h+1} e^{-2\gamma t}\|f\|^2_{L_2(\Omega)}dt.\end{aligned}$$

Do $f \in L_2(-\gamma, Q)$, $\lim \int\limits_j^{h+1} e^{-2\gamma t}\|f\|^2_{L_2(\Omega)}dt = 0$ khi $h, j \to -\infty$ nên ta suy ra $\lim \|f^{jh}\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_j^\infty)} = 0$ khi $h, j \to -\infty$.
Lập luận tương tự ta được $\lim \|f^{jh}_{t^s}\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_j^\infty)} = 0$ khi $h, j \to -\infty$, với mọi $s = 0, ..., k+1$.

Điều này dẫn đến $\{u^h\}_{h=0}^{-\infty}$ là dãy Cauchy và do đó u^h hội tụ đến hàm u trong $H_0^{2m+l}(-\gamma, Q)$. Hơn nữa, $H_0^{2m+l}(-\gamma, Q)$ nhúng liên tục vào $H^{m,0}(-\gamma, Q)$ vì

$$||u||^2_{H_0^{2m+l}(-\gamma,Q)} \le \sum_{|\alpha|=0}^{2m+l}\int\limits_Q e^{-2\gamma t}r^{2(|\alpha|-2m-l)}|D^\alpha u|^2dxdt \le C||u||^2_{H^{m,0}(-\gamma,Q)}.$$

Do đó dễ dàng kiểm tra được $u \in H^{m,0}(-\gamma, Q)$ là nghiệm của bài toán (1.2)-(1.3).

Kết quả về tính trơn theo biến thời gian và tính trơn theo tập hợp các biến của bài toán biên Dirichlet không có điều kiện ban đầu đối với hệ phương trình Schrödinger mạnh trong miền có điểm nón có thể được phát biểu như sau.

Định lí 2.3. *Giả sử $l \in \mathbb{N}$ và tồn tại $\mu > 0$, $\mu_2 > 0$ sao cho*

i) $\sup\left\{|\dfrac{\partial a_{pq}}{\partial t}| : (x,t) \in Q,\ 0 \le |p|, |q| \le m\right\} = \mu < \infty,$
$|\dfrac{\partial^k a_{pq}}{\partial t^k}| \le \mu_2,$ *với* $2 \le k \le l+1$;

ii) $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, Q)$, *với mọi* $x \in \Omega$, $0 \le k \le l+1$.

Khi đó với mọi $\gamma > (2l+1)\gamma_0$*, nghiệm* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ *của bài toán* (1.2)-(1.3) *có đạo hàm theo biến* t *tới cấp* l *và thỏa mãn* $u_{t^k} \in H^{m,0}(-\gamma, Q)$*, với mọi* $k = 0, \ldots, l$ *sao cho*

$$\|u_{t^k}\|^2_{H^{m,0}(-\gamma,Q)} \leq C \sum_{j=0}^{k+1} \|f_{t^j}\|^2_{L_2(-\gamma,Q)}, \tag{2.28}$$

trong đó hằng số C *không phụ thuộc vào* u, f*.*

Định lí 2.4. *Lấy* l *là một số nguyên không âm. Giả sử rằng* $u(x,t)$ *là nghiệm suy rộng trong không gian* $H^{m,0}(-\gamma, Q)$ *với* $\gamma > (2(2m+l)+1)\gamma_0$ *của bài toán* (1.2)-(1.3) *và* $f_{t^k} \in H_0^{l,0}(-\gamma, Q)$*, với* $k \leq 2m+l+1$*. Hơn nữa, giả sử rằng trong dải*

$$m - \frac{n}{2} \leq Im\lambda \leq 2m + l - \frac{n}{2}$$

không chứa điểm phổ của các toán tử tuyến tính trong hệ (1.2)-(1.3)*. Khi đó* $u \in H_0^{2m+l}(-\gamma, Q)$ *và thỏa mãn ước lượng sau*

$$\|u\|^2_{H_0^{2m+l}(-\gamma,Q)} \leq C \sum_{k=0}^{2m+l+1} \|f_{t^k}\|^2_{H_0^{l,0}(-\gamma,Q)}. \tag{2.29}$$

2.4. Kết luận Chương 2

Trong chương này, chúng tôi dành hai mục đầu tiên để trình bày về tính trơn của nghiệm của bài toán với điều kiện ban đầu $t = h$ tùy ý. Đã có một số công trình nghiên cứu tính trơn của bài toán có điều kiện ban đầu đối với hệ phương trình Schrödinger trong miền có điểm nón, chẳng hạn [24], [25], [30]. Trong các kết quả này, hằng số C trong các ước lượng tiên nghiệm đều phụ thuộc vào thời điểm ban đầu h. Vì vậy chúng tôi cần đặt điều kiện phù hợp hơn cho vế phải f và đánh giá tinh hơn để các hằng số đó độc lập với h. Sau đó, bằng cách tiến qua giới hạn khi $h \to -\infty$, chúng tôi nhận được các kết quả về tính trơn của nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu. Các kết quả chính đạt được bao gồm:

- Tính trơn theo biến thời gian của nghiệm suy rộng của bài toán trong không gian $H^{m,0}(-\gamma, Q)$. Tính trơn này chỉ phụ thuộc tính trơn của vế phải mà không cần đòi hỏi điều kiện về tính trơn của biên.

- Tính trơn theo tập hợp các biến của nghiệm trong không gian Sobolev có trọng $H_0^{2m+l}(-\gamma, Q)$. Để đạt được các kết quả này, ngoài điều kiện về tính trơn của vế phải f, chúng tôi còn cần phải giả thiết thêm điều kiện đối với các hệ số của toán tử L và điều kiện phổ của bó toán tử tương ứng, tức là điều kiện về tính trơn của biên.

Chương 3

BIỂU DIỄN TIỆM CẬN NGHIỆM TRONG LÂN CẬN CỦA ĐIỂM NÓN

Mục đích chính của chương này là nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm suy rộng trong lân cận của điểm nón. Kết quả chính của chương là Định lí 3.1. Phương pháp chính để nghiên cứu là sử dụng các kết quả về phổ của các toán tử tuyến tính và các kết quả về biểu diễn tiệm cận nghiệm của bài toán elliptic trong lân cận của điểm nón cùng với phương pháp chứng minh quy nạp toán học. Nội dung chính của chương này được viết theo bài báo số 3 trong danh mục các công trình của tác giả.

3.1. Các kiến thức bổ trợ

Đặt $r = |x|$ và $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ là một hệ tọa độ cực trong S^{n-1}. Ta dễ dàng kiểm tra được $D^\alpha = r^{-|\alpha|} \sum\limits_{k=0}^{|\alpha|} P_{\alpha,k}(\omega, D_\omega)(rD_r)^k$, trong đó $P_{\alpha,k}(\omega, D_\omega)$ là các toán tử tuyến tính với các hệ số là các hàm trơn trong $\overline{\Omega}$ với $D_r = i\partial/\partial r$, $D_\omega = \partial/\partial\omega_1 \ldots \partial\omega_{n-1}$.

Kí hiệu

$$\mathcal{L}(t, D) = \sum_{|p|=|q|=m} D^p(a_{pq}(0, t)D^q)$$

là phần chính của toán tử $L(x, t, D)$ tại gốc tọa độ O. Khi đó ta viết lại toán tử $\mathcal{L}(t, D)$ ở dạng sau

$$\mathcal{L}(t, D) = r^{-2m}\mathfrak{L}(\omega, t, rD_r, D_\omega)$$

trong đó $\mathfrak{L}(\omega, t, rD_r, D_\omega)$ là toán tử tuyến tính với các hệ số trơn.
Ta giới thiệu bó toán tử

$$\mathfrak{U}(\lambda, t) = (\mathfrak{L}(\omega, t, \lambda, D_\omega), D_\omega^0, \ldots, D_\omega^{m-1}),\ \lambda \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R},$$

của bài toán elliptic phụ thuộc tham số sau

$$\mathfrak{L}(\omega, t, \lambda, D_\omega)u = f, \text{ trong } G, \tag{3.1}$$

$$D_\omega^j u = g_j, \text{ trên } \partial G,\ j = 0, \ldots, m-1. \tag{3.2}$$

Với mỗi hằng số $\lambda \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, bó toán tử $\mathfrak{U}$ là một ánh xạ liên tục từ không gian

$$\mathcal{X} \equiv H^l(G) \text{ vào không gian } \mathcal{Y} \equiv H^{l-2m}(G) \times \Pi_{j=1}^m H^{l-\mu_j-1/2}(\partial G),$$

trong đó $l \geq 2m$ và $\mu_j = 0, \cdots, m-1$.

Bây giờ ta nhắc lại một số khái niệm quan trọng về bó toán tử phụ thuộc tham số $\mathfrak{U}$ như sau (có thể xem thêm trong [39]). Lấy $t_0 \in \mathbb{R}$ là một số cố định. Nếu $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\varphi_0 \in \mathcal{X}$ sao cho $\varphi_0 \neq 0$, $\mathfrak{U}(\lambda_0, t_0)\varphi_0 = 0$, thì ta gọi λ_0 là một giá trị riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}(\lambda, t_0)$ và φ_0 được gọi là một vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng λ_0. Khi đó $\Lambda = \dim\ker \mathfrak{U}(\lambda_0, t_0)$ được gọi là bội hình học của giá trị riêng λ_0.

Nếu các phần tử $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_s$ của $\mathcal{X}$ thỏa mãn phương trình

$$\sum_{q=0}^{\sigma} \frac{1}{q!} \frac{d^q}{d\lambda^q} \mathfrak{U}(\lambda, t_0) \mid_{\lambda=\lambda_0} \varphi_{\sigma-q} = 0, \text{ với } \sigma = 1, \ldots, s,$$

thì bộ sắp thứ tự $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_s$ được gọi là một xích Jordan tương ứng với giá trị riêng λ_0 với độ dài là $s+1$. Hạng của vectơ riêng φ_0 (rankφ_0) được định nghĩa là độ dài cực đại của xích Jordan tương ứng với vectơ riêng φ_0.
Một hệ trực chuẩn các vectơ riêng của $\mathfrak{U}(\lambda_0, t_0)$ tương ứng với giá trị riêng λ_0 là một hệ các vectơ riêng $\varphi_{1,0}, \varphi_{2,0}, \ldots, \varphi_{\Lambda,0}$ sao cho hạng của $\varphi_{1,0}$ là lớn nhất trong số các hạng của các vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng λ_0 và

hạng của $\varphi_{j,0}$ là lớn nhất trong số các hạng của các vectơ riêng trong phần bù của không gian ker $\mathfrak{U}(\lambda_0, t_0)$ của $\varphi_{1,0}, \ldots, \varphi_{j-1,0}$ $(j = 2, \ldots, \Lambda)$. Các số $\kappa_j = \text{rank}\varphi_{j,0}$ $(j = 1, \ldots, \Lambda)$ gọi là các bội riêng và tổng $\kappa = \kappa_1 + \cdots + \kappa_\Lambda$ gọi là bội đại số của giá trị riêng λ_0.

Giá trị riêng λ_0 được gọi là giá trị riêng đơn nếu bội đại số của nó bằng 1, giá trị riêng λ_0 được gọi là giá trị riêng bán đơn nếu bội đại số và bội hình học của nó bằng nhau.

Với mỗi $t \in \mathbb{R}$ cố định, tập tất cả các số phức λ sao cho $\mathfrak{U}(\lambda, t)$ không khả nghịch được gọi là phổ của bó toán tử $\mathfrak{U}(\lambda, t)$. Ta biết rằng, chẳng hạn xem trong [39], phổ của toán tử $\mathfrak{U}(\lambda, t)$ là một tập đếm được các giá trị riêng

Để thu được biểu diễn tiệm cận nghiệm trong lân cận của điểm kì dị, sau này ta còn đòi hỏi thêm các điều kiện về các giá trị riêng và vectơ riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}(\lambda, t)$ như sau:

Lấy l_1, l_2 là các số nguyên không âm và β_1, β_2 là các số thực sao cho $l_1 - \beta_1 < l_2 - \beta_2$. Ta nói rằng giả thiết (**H**) cho các số $l_1, l_2, \beta_1, \beta_2$ được thỏa mãn nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

i. Các đường thẳng $Im\lambda = -\beta_i + l_i - \dfrac{n}{2}$, $(i = 1, 2)$ không chứa các giá trị riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}(\lambda, t)$ và dải $-\beta_1 + l_1 - \dfrac{n}{2} < Im\lambda(t) < -\beta_2 + l_2 - \dfrac{n}{2}$ chỉ chứa các hàm giá trị riêng $\lambda_\mu(t)$, $\mu = 1, \ldots, N$, với bội hình học tương ứng là Λ_μ và các bội riêng $\kappa_{\mu,k}$, $\mu = 1, \ldots, N$, $k = 1, .., \Lambda_\mu$, không phụ thuộc vào $t \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, các giá trị riêng là các hàm giải tích trong $\mathbb{R}$.

ii. Ta có thể chọn được một hệ trực chuẩn các vectơ $\varphi_{k,s}^{(\mu)}(\omega, t)$ trong đó $k = 1, \ldots, \Lambda_\mu$, $s = 1, \ldots, \kappa_{\mu,k}$, của xích Jordan của $\mathfrak{U}(\lambda, t)$ tương ứng với giá trị riêng $\lambda_\mu(t)$, $\mu = 1, \ldots, N$ sao cho các vectơ $\varphi_{k,s}^{(\mu)}(\omega, t)$ là các hàm trơn trong $\mathbb{R}$ với $k = 1, \ldots, \Lambda_\mu$, $s = 1, \ldots, \kappa_{\mu,k}$ với mọi $\omega \in \overline{G}$.

Chú ý rằng nếu các đường thẳng $Im\lambda = -\beta_i + l_i - \dfrac{n}{2}$, $(i = 1, 2)$ không chứa các hàm giá trị riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}(\lambda, t)$ và dải $-\beta_1 + l_1 - \dfrac{n}{2} < Im\lambda(t) <$

$-\beta_2 + l_2 - \dfrac{n}{2}$ chỉ chứa các giá trị riêng đơn hoặc bán đơn $\lambda_\mu(t)$, $\mu = 1, \ldots, N$, với bội không đổi, thì từ [34] ta có thể kết luận rằng giả thiết (**H**) cho các số $l_1, l_2, \beta_1, \beta_2$ được thỏa mãn.

Nhận xét 3.1.1 Theo Định lí 5.2.1 trong [39], nếu $\lambda_0(t)$ là một giá trị riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}(\lambda, t)$ với bội hình học I và các bội riêng $\kappa_1, \ldots, \kappa_I$ không phụ thuộc vào t thì tồn tại một lân cận U_1 của gốc tọa độ O sao cho trong $U_1 \times \mathbb{R}$ toán tử $\mathfrak{U}^{-1}(\lambda, t)$ có biểu diễn sau

$$\mathfrak{U}^{-1}(\lambda, t) = \sum_{j=1}^{I} \sum_{s=0}^{\kappa_j - 1} \frac{P_{j,s}(t)}{(\lambda - \lambda_0(t))^{\kappa_j - s}} + \mathfrak{P}(\lambda, t), \tag{3.3}$$

trong đó $P_{j,s}(t)$ là họ toán tử phụ thuộc giải tích theo t và $\mathfrak{P}(\lambda, t)$ là họ toán tử liên tục phụ thuộc giải tích theo cả hai biến λ và t.

Tiếp theo, chúng tôi chuyển qua giới thiệu về bó toán tử liên hợp với bó toán tử $\mathfrak{U}(\lambda, t)$. Trước hết ta nhắc lại định nghĩa về hệ Dirichlet bậc l (xem [39] (trang 63)).

Một hệ các toán tử vi phân biên $\{B_1, \ldots, B_l\}$ gọi là một hệ chuẩn tắc trên Γ nếu

- $\mathrm{ord} B_k \neq \mathrm{ord} B_j$ với $k \neq j$;
- $B_j^o(x, t, \nu(x)) \neq 0,\ j = 1, \ldots, l$ với mọi $(x, t) \in \Gamma$, trong đó $B_j^o(x, t, D)$ là phần chính của $B_j(x, t, D)$ và $\nu(x)$ là trường vectơ đơn vị pháp tuyến ngoài của $S \setminus \{0\}$ tại điểm x.

Một hệ toán tử vi phân biên $\{B_1, \ldots, B_l\}$ gọi là một hệ Dirichlet bậc l trên Γ nếu hệ này là chuẩn tắc và bậc của mỗi toán tử B_j đều bé hơn l.

Khi đó, nếu kí hiệu toán tử biên $B_j = \dfrac{\partial^j}{\partial \nu^j},\ j = 0, \ldots, m-1$ là các toán tử biên của bài toán (1.2)-(1.3) thì hệ $\{B_0, \ldots, B_{m-1}\}$ là một hệ chuẩn tắc trên ∂K, và do đó có các toán tử biên

$$B_j(t, D),\ \mathrm{ord} B_j(t, D) = \mu_j < 2m,\ j = m, \ldots, 2m-1$$

sao cho hệ $\{B_0, \ldots, B_{2m-1}\}$ là một hệ Dirichlet bậc $2m$ trên ∂K, hơn nữa công thức Green sau

$$\int_K \mathcal{L}u\overline{v} + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial K} B_j u \overline{B'_{j+m}} v ds = \int_K u\overline{\mathcal{L}^+ v} dx + \int_{j=0}^{m-1} B_{j+m} u \overline{B'_j} v ds, \tag{3.4}$$

đúng với $u, v \in C_0^\infty(\overline{K})$ và với mỗi t (xem trong [39]). Ở đây

$$\mathcal{L}^+ u = \mathcal{L}^+(t, D)u = (-1)^m \sum_{|p|=|q|=m} (-1)^{|p|} D^p(\overline{a}_{pq}(0, t) D^q u)$$

là toán tử liên hợp hình thức của $\mathcal{L}$ và $B'_j = B'_j(t, D)$ là các toán tử biên bậc $\mu'_j = 2m - 1 - \mu_{j+m}$ nếu $j \leq m - 1$ và bậc $\mu'_j = 2m - 1 - \mu_{j-m}$ nếu $j \geq m$, trong đó $\mu_j = j$ nếu $0 \leq j \leq m - 1$.

Các toán tử $\mathcal{L}^+(t, D)$, $B_j(t, D)$ và $B'_j(t, D)$ có thể viết được ở dạng

$$\mathcal{L}^+(t, D) = r^{-2m} \mathfrak{L}^+(\omega, t, rDr, D_\omega), \tag{3.5}$$

$$B'_j(t, D) = r^{-\mu'_j} \mathfrak{B}'_j(\omega, t, rDr, D_\omega), \ j = 0, \ldots, m - 1. \tag{3.6}$$

$$B_j(t, D) = r^{-\mu'_j} \mathfrak{B}_j(\omega, t, rDr, D_\omega), \ j = 0, \ldots, m - 1 \tag{3.7}$$

Từ công thức Green (3.4) ta nhận được công thức Green sau

$$\int_K \mathfrak{L}(t, \lambda) u\overline{v} + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial K} \mathfrak{B}_j(t, \lambda) u \overline{\mathfrak{B}'_{j+m}(t, -\overline{\lambda} + 2m - n) v} ds =$$

$$\int_K u\overline{\mathfrak{L}^+(t, -\overline{\lambda} + 2m - n) v} dx + \int_{j=0}^{m-1} \mathfrak{B}_{j+m}(t, \lambda) u \overline{\mathfrak{B}'_j(t, -\overline{\lambda} + 2m - n) v} ds, \tag{3.8}$$

với $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ và với mọi t. Trong đó, để cho ngắn gọn, ta đã kí hiệu $\mathfrak{L}(t, \lambda)$, $\mathfrak{B}_j(t, \lambda)$, $\mathfrak{L}^+(t, \lambda)$ và $\mathfrak{B}'_j(t, \lambda)$ thay cho $\mathfrak{L}(\omega, t, \lambda, D_\omega)$, $\mathfrak{B}_j(\omega, t, \lambda, D_\omega)$, $\mathfrak{L}^+(\omega, t, \lambda, D_\omega)$ và $\mathfrak{B}'_j(\omega, t, \lambda, D_\omega)$. Tập phổ của các toán tử tuyến tính trong hệ sau

$$\mathfrak{L}^+(\omega, t, -i\lambda + 2m - n, D_\omega) v = 0, \text{ trong } G, \tag{3.9}$$

$$\mathfrak{B}'_j(\omega, t, -i\lambda + 2m - n, D_\omega) v = 0, \text{ trên } \partial G, \ j = 0, \ldots, m - 1, \tag{3.10}$$

được gọi là bài toán liên hợp của tập phổ của các toán tử tuyến tính trong hệ (3.1)-(3.2). Và bó toán tử

$$\mathfrak{U}^+(\lambda,t)=\{\mathfrak{L}^+(\omega,t,-i\lambda+2m-n,D_\omega);\mathfrak{B}'_j(\omega,t,-i\lambda+2m-n,D_\omega)\},$$

với $j=0,\dots,m$ được gọi là bó toán tử liên hợp của bó toán tử $\mathfrak{U}(\lambda,t)$ theo công thức Green (3.8) (xem [39, trang 64]).

Kí hiệu $\widehat{U}_0=U_0\cap U_1$, với U_0 là lân cận của gốc tọa độ O xác định ở trang 5 và U_1 được xác định ở trang 53.

3.2. Biểu diễn tiệm cận nghiệm của bài toán elliptic phụ thuộc tham số trong lân cận của điểm nón

Đầu tiên, ta xét bài toán biên elliptic phụ thuộc vào tham số t như sau

$$(-1)^m\mathcal{L}(t,D)u=f \text{ trong } Q, \tag{3.11}$$

$$D^j_\omega u=g_j \text{ trên } \Gamma,\ j=0,\dots,m-1. \tag{3.12}$$

Bổ đề sau cho ta kết quả về biểu diễn tiệm cận nghiệm của bài toán elliptic phụ thuộc tham số trong lân cận của điểm nón. Trong [31], các tác giả đã phát biểu và chứng minh kết quả tương tự với điều kiện các giá trị riêng là bán đơn và xét bài toán trong trụ $K\times(0,\infty)$. Ở đây, mặc dù chỉ yêu cầu điều kiện yếu hơn đối với các giá trị riêng (điều kiện (**H**)) nhưng chúng tôi vẫn nhận được biểu diễn tiệm cận nghiệm trong $K_\infty=K\times\mathbb{R}$.

Bổ đề 3.1. *Giả sử $u\in V^{l_1,0}_{\beta_1,d}(-\gamma,K_\infty)$ là một nghiệm của bài toán* (3.11)-(3.12)*, trong đó $f\in V^{l_2-2m,0}_{\beta_2,d}(-\gamma,K_\infty)$, $g_j\in V^{l_2-2m+j+1/2,0}_{\beta_2,d}(-\gamma,\partial K_\infty)$ và l_1, l_2, d là các số tự nhiên, β_1,β_2 là các số thực thỏa mãn $l_1,l_2\geq 2m$, $\beta_2-l_2<\beta_1-l_1$. Giả sử $u\equiv 0$ ngoài U_1. Hơn nữa, giả sử rằng giả thiết (**H**) cho các số l_1, l_2, β_1, β_2 được thỏa mãn. Khi đó u thỏa mãn biểu diễn sau*

$$u(x,t)=\sum_{\mu=1}^{N}r^{-i\lambda_\mu(t)}\sum_{j=1}^{\Lambda_\mu}\sum_{s=0}^{\kappa_{\mu,j}-1}c_{\mu,j,s}(t)u_{\mu,j,s}+w(x,t), \tag{3.13}$$

trong đó $w \in V^{l_2,0}_{\beta_2,d}(-\gamma, K_\infty)$, $c_{\mu,j,s} \in L^d_2(-\gamma, \mathbb{R})$
và $u_{\mu,j,s} = \sum\limits_{\sigma=0}^{s} \dfrac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma \varphi^{(\mu)}_{j,s-\sigma}(\omega, t)$.

Chứng minh. Với $\mu = 1, \ldots, N$, giả sử $\varphi^{(\mu)}_{k,s}(\omega, t)$, $k = 1, \ldots, \Lambda_\mu, s = 1, \ldots, k$ là một hệ chính tắc các hàm vectơ riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}^+(\lambda, t)$ (xem thêm trong Bổ đề 4.1 trong [51]). Đặt

$$v_{\mu,j,s}(x,t) = r^{-i\overline{\lambda_\mu}+2m-n} \sum_{\sigma=0}^{s} \frac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma \varphi^{(\mu)}_{j,s-\sigma}(\omega, t)$$

với $\mu = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, \Lambda_\mu$, $s = 0, \ldots, \kappa_{\mu,j-1}$. Với mỗi t cố định, theo Định lí 6.1.4 trong [39] ta có biểu diễn (3.13) với

$$w(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{Im\lambda = -\beta_2 + l_2 - \frac{n}{2}} r^\lambda \mathfrak{U}^{-1}(\lambda) \mathfrak{F}(\omega, \lambda, t) d\lambda, \tag{3.14}$$

$$c_{\mu,j,s}(t) = \int\limits_\Omega f(x,t) v_{\mu,j,s}(x,t) dx + \int\limits_\Gamma \sum_{j=0}^{m-1} g_j(x,t) B'_{j+m} v_{\mu,j,s}(x,t) dS, \tag{3.15}$$

với $\mu = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, \Lambda_\mu$, $s = 0, \ldots, \kappa_{\mu,j} - 1$, trong đó ta đã kí hiệu $\mathfrak{F} = (\widetilde{r^{2m} f}, \widetilde{r^{2m} g_0}, \ldots, \widetilde{r^{2m} g_{j-1}})$. Ở đây $\widetilde{g}(\omega, \lambda, t) := \int_0^{+\infty} r^{-i\lambda-1} g(\omega, r, t) dr$ là biến đổi Mellin theo biến r của hàm $g(\omega, \lambda, t)$.

Trước tiên, ta chứng minh rằng $w \in V^{l_2,0}_{\beta_2,d}(-\gamma, K_\infty)$. Do trên đường thẳng $Im\lambda = -\beta_2 + l_2 - \dfrac{n}{2}$ không có các giá trị riêng của các tuyến tử tuyến tính ở hệ (3.1)-(3.2), nên từ chứng minh của Định lí 3.6.1 trong [39] ta có đánh giá sau

$$||\mathfrak{U}^{-1}(\lambda, t)\mathfrak{F}||^2_{W_2^{l_2}(\Omega,\lambda)} \le C\left(||\widetilde{r^{2m} f}||^2_{W_2^{l_2-2m}(\Omega,\lambda)} + \sum_{j=0}^{m-1} ||\widetilde{r^{2m} g_j}||^2_{W_2^{l_2-\mu_j-1/2}(S,\lambda)} \right), \tag{3.16}$$

đúng với mọi λ nằm trên đường thẳng $Im\lambda = -\beta_2 + l_2 - \dfrac{n}{2}$, $t \in \mathbb{R}$, trong đó hằng số C không phụ thuộc vào λ, t, với

$$||u||_{W_2^l(\Omega,\lambda)} := ||u||_{H^l(\Omega)} + |\lambda|^l ||u||_{L_2(\Omega)},$$

$$||u||_{W_2^{l-1/2}(S,\lambda)} := ||u||_{H^{l-1/2}(S)} + |\lambda|^{l-1/2} ||u||_{L_2(S)}$$

lần lượt là các chuẩn tương đương trong $H^l(\Omega)$, $H^{l-1/2}(S)$ với số phức λ cố định bất kì (xem Bổ đề 3.6.3 trong [39]).

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo d rằng

$$||(\mathfrak{U}^{-1})_{t^d}(\lambda,t)\mathfrak{F}||^2_{W_2^{l_2}(\Omega,\lambda)} \leq C(d)\left(||\widetilde{r^{2m}f}||^2_{W_2^{l_2-2m}(\Omega,\lambda)}+\sum_{j=0}^{m-1}||\widetilde{r^{2m}g_j}||^2_{W_2^{l_2-\mu_j-1/2}(S,\lambda)}\right). \tag{3.17}$$

Với $d=0$, bất đẳng thức (3.17) đúng do (3.16). Giả sử (3.17) đúng với $h-1$. Từ đẳng thức

$$\mathfrak{U}(\lambda,t)\mathfrak{U}^{-1}(\lambda,t) = Id,$$

lấy đạo hàm d lần theo biến t ta nhận được

$$\sum_{k=0}^{d-1}\binom{d}{k}\mathfrak{U}_{t^{d-k}}(\lambda,t)(\mathfrak{U}^{-1})_{t^k}(\lambda,t)+\mathfrak{U}(\lambda,t)(\mathfrak{U}^{-1})_{t^d}(\lambda,t)=0. \tag{3.18}$$

Viết lại đẳng thức (3.18) dưới dạng

$$(\mathfrak{U}^{-1})_{t^d}(\lambda,t) = -\mathfrak{U}^{-1}(\lambda,t)\sum_{k=0}^{d-1}\binom{d}{k}\mathfrak{U}_{t^{d-k}}(\lambda,t)(\mathfrak{U}^{-1})_{t^k}(\lambda,t). \tag{3.19}$$

Từ đẳng thức này và giả thiết quy nạp, ta nhận được (3.17). Do Bổ đề 6.1.4 trong [39] nên chuẩn trong không gian $H^l_\beta(K)$ tương đương với chuẩn sau

$$|||u||| = \left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Im\lambda=-\beta+l-\frac{1}{2}}||\widetilde{u}(\cdot,\lambda)||^2_{W_2^{l-1/2}(S,\lambda)}d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sử dụng điều này với chú ý $\widetilde{w}(\omega,\lambda,t)=\mathfrak{U}^{-1}(\lambda,t)\mathfrak{F}(\omega,\lambda,t)$ và (3.16), từ (3.14)

ta suy ra với mọi t thì

$$||w(\cdot,t)||^2_{H^{l_2}_{\beta_2}(K)} \leq \frac{C}{2\pi i} \int\limits_{Im\lambda=-\beta_2+l_2-\frac{n}{2}} ||\tilde{w}(\cdot,\lambda,t)||^2_{W^{l_2}_2(\Omega,\lambda)} d\lambda$$

$$= \frac{C}{2\pi i} \int\limits_{Im\lambda=-\beta_2+l_2-\frac{n}{2}} ||\mathfrak{U}^{-1}(\lambda,t)\mathfrak{F}(\cdot,\lambda,t)||^2_{W^{l_2}_2(\Omega,\lambda)} d\lambda$$

$$\leq \frac{C}{2\pi i} \int\limits_{Im\lambda=-\beta_2+l_2-\frac{n}{2}} \big(||\widetilde{r^{2m}f}||^2_{W^{l_2-2m}_2(\Omega,\lambda)} + \sum_{j=0}^{m-1} ||\widetilde{r^{2m}g_j}||^2_{W^{l_2-\mu_j-1/2}_2(S,\lambda)}\big) d\lambda$$

$$\leq C\big(||r^{2m}f(\cdot,t)||^2_{H^{l_2-2m}_{\beta_2-2m}(K)} + \sum_{j=0}^{m-1} ||r^{\mu_j}g_j||^2_{H^{l_2-\mu_j-1/2}_2(S)}\big)$$

$$\leq C\big(||f(\cdot,t)||^2_{H^{l_2-2m}_{\beta_2}(K)} + \sum_{j=0}^{m-1} ||g_j||^2_{H^{l_2-\mu_j-1/2}(S)}\big).$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức trên với $e^{2\gamma t}$ rồi lấy tích phân theo t trên $\mathbb{R}$ ta nhận được $w \in H^{l_2,0}_{\beta_2}(-\gamma, K_\infty)$ và

$$||w||^2_{H^{l_2,0}_{\beta_2}(-\gamma,K_\infty)} \leq C\left(||f||^2_{V^{l_2-2m,0}_{\beta_2,0}(-\gamma,K_\infty)} + \sum_{j=0}^{m-1} ||g_j||^2_{V^{l_2-\mu_j-1/2,0}_{\beta_2,0}(-\gamma,\Gamma)}\right). \tag{3.20}$$

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức (3.14) d lần theo t, ta có

$$w_{t^d}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{Im\lambda=-\beta_2+l_2-\frac{n}{2}} r^\lambda \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} (\mathfrak{U}^{-1})_{t^k}(\lambda,t)\widetilde{\mathfrak{F}}_{t^{d-k}}(\omega,\lambda,t) d\lambda.$$

Sử dụng (3.17) và các lập luận tương tự như khi chứng minh (3.20) ta nhận được $w_{t^d} \in H^{l_2,0}_{\beta_2}(-\gamma, K_\infty)$ và

$$||w_{t^d}||^2_{H^{l_2,0}_{\beta_2}(-\gamma,K_\infty)} \leq C\left(||f||^2_{V^{l_2-2m,0}_{\beta_2,0}(-\gamma,K_\infty)} + \sum_{j=0}^{m-1} ||g_j||^2_{V^{l_2-\mu_j-1/2,0}_{\beta_2,0}(-\gamma,\Gamma)}\right).$$

Từ đó suy ra $w \in V^{l_2,0}_{\beta_2,d}(-\gamma, K_\infty)$.

Tiếp theo ta chứng minh $c_{\mu,j,s}(\cdot) \in L^d_2(-\gamma,\mathbb{R})$ với $\mu = 1,\ldots,N$ và với mọi $j = 1,\ldots,\Lambda_\mu,\ s = 0,\ldots,\kappa_{\mu,j-1}$. Thật vậy, ta nhớ lại rằng

$$D^\alpha_x = r^{-|\alpha|} \sum_{p=0}^{|\alpha|} P_{\alpha,p}(\omega, D_\omega)(rD_r)^p,$$

và

$$v_{\mu,j,s}(x,t) = r^{-i\overline{\lambda_\mu}+2m-n}\sum_{\sigma=0}^{s}\frac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma \varphi_{j,s-\sigma}^{(\mu)}(\omega,t),$$

nên

$$\begin{aligned}
&D^\alpha v_{\mu,j,s}(x,t)\\
&= r^{-|\alpha|}\sum_{p=0}^{|\alpha|}(rD_r)^p\left(r^{-i\overline{\lambda_\mu}+2m-n}\sum_{\sigma=0}^{s}\frac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma\varphi_{j,s-\sigma}^{(\mu)}(\omega,t)P_{\alpha,p}(\omega,D_\omega)\right)\\
&= r^{-|\alpha|-i\overline{\lambda_\mu}+2m-n}\sum_{p=0}^{|\alpha|}\sum_{k=0}^{p}\sum_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma(\ln r)P_{\alpha,p}(\omega,D_\omega\varphi_{j,s-\sigma}^{(\mu)}(\omega,t)), \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

trong đó Q_σ là đa thức của $\ln r$ với bậc không vượt quá σ.

Tồn tại số dương ϵ sao cho $Im\lambda_\mu(t) \le -\beta_2 + l_2 - \dfrac{n}{2} - 2\epsilon$, do đó, từ (3.21) ta suy ra

$$|r^{-\beta_2+l_2-2m+|\alpha|}D^\alpha v(x,t)| \le Cr^{-\frac{n}{2}+\epsilon}\sum_{p=0}^{|\alpha|}|P_{\alpha,p}\sum_{\sigma=0}^{s}|Q_\sigma(\ln r)|\varphi_{j,s-\sigma}^{(\mu)}(\omega,t)|,$$

với mọi $(x,t)\in K_\infty$ và mọi bộ đa chỉ số α. Nên $v_{\mu,j,s}(\cdot,t)\in H^l_{-\beta_2+l_2-2m+l}(K)$ và

$$||v_{\mu,j,s}(\cdot,t)||_{H^l_{-\beta_2+l_2-2m+l}(K)} \le C||\varphi_{j,s-\sigma}^{(\mu)}(\cdot,t)||_{W_2^l(G)},$$

với hầu khắp t.

Đạo hàm p lần hàm $v_{\mu,j,s}$ theo t ta được

$$\begin{aligned}
(v_{\mu,j,s})_{t^p} &= \sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}\left(r^{-i\overline{\lambda}_k(t)+2m-n}\right)_{t^{p-q}}\sum_{\sigma=0}^{s}(\varphi_{j,s-\sigma}^{(\mu)}(\omega,t))_{t^q}\\
&= r^{-i\overline{\lambda}_k(t)+2m-n}\sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}\sum\frac{n!}{m_1!\dots m_n!}(\ln r)^{m_1+\dots+m_n}\\
&\quad\times\prod_{s=1}^{n}\left(\frac{-\lambda_\mu^{(s)}(t)}{s!}\right)^{m_s}(\varphi_{j,s-\sigma}^{(\mu)}(\omega,t))_{t^q},
\end{aligned}$$

trong đó tổng thứ hai lấy theo bộ n số $(m_1,\dots,m_n)$ thỏa mãn điều kiện

$$m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n.$$

Lặp lại các lập luận như trên, ta được

$$\|(v_{\mu,j,s})_{t^p}(\cdot,t)\|_{H^l_{-\gamma_2+l_2-2m+l}(K)} \le C\sum_{q=0}^{p}\|(\varphi^{(\mu)}_{j,s})_{t^q}\|_{H^l(G)}.$$

Như vậy ta có

$$\sup\|v\|_{V^{l,p}_{2,-\gamma_2+l_2-2m+l}(K)} \le C\sum_{q=0}^{p}\sup\|(\varphi^{(\mu)}_{j,s})_{t^q}\|_{H^l(G)} < +\infty, \tag{3.22}$$

với các số nguyên không âm l, p bất kì.

Đặt $a_{\mu,j,s}(t) = \int\limits_K f(x,t)v_{\mu,j,s}(x,t)dx$. Với $p \le d$, sử dụng (3.22), ta có

$$\begin{aligned}
|(c_{\mu,j,s})_{t^p}(t)|^2 &= \Big|\sum_{q=0}^{p}\tbinom{p}{q}\int\limits_K f_{t^{p-q}}(x,t)(v_{\mu,j,s})_{t^q}(x,t)dx\Big|^2\\
&\le C\Big(\sum_{q=0}^{p}\|r^{\beta_2-l_2+2m}f_{t^q}\|^2_{L_2(K)}\Big)\Big(\sum_{q=0}^{p}\|r^{-\beta_2+l_2-2m}(v_{\mu,j,s})_{t^q}\|^2_{L_2(K)}\Big)\\
&\le C\sum_{q=0}^{p}\|f_{t^q}\|^2_{H^{l_2-2m}_{\beta_2}(K)}.
\end{aligned}$$

Ta đặt $b^i_{\mu,j,s}(t) = \int\limits_S g_i.B'_{i+m}v_{\mu,j,s}(t),\ i = 1,\dots,m.$. Khi đó, lại sử dụng (3.22), ta có với $p \le d$ thì

$$\begin{aligned}
&|(b^i_{\mu,j,s})_{t^p}(t)|^2\\
&= \Big|\sum_{q=0}^{p}\tbinom{p}{q}((g_j)_{t^{p-q}}(\cdot,t),(v_{\mu,j,s})_{t^q}(\cdot,t))_S\Big|^2\\
&\le C\Big(\sum_{q=0}^{p}\|r^{\beta_2-l_2+\mu_j+\frac{1}{2}}(g_j)_{t^q}\|^2_{L_2(S)}\Big)\Big(\sum_{q=0}^{p}\|r^{-\beta_2+l_2-\mu_j-\frac{1}{2}}(B'_{j+m}v_{\mu,j,s})_{t^q}\|^2_{L_2(K)}\Big)\\
&\le C\Big(\sum_{q=0}^{p}\|(g_j)_{t^q}\|^2_{H^{l_2-\mu_j-\frac{1}{2}}_{\beta_2}(S)}\Big)\Big(\sum_{q=0}^{p}\|(v_{\mu,j,s})_{t^q}\|^2_{H^{2m-\mu_j}_{-\beta_2+l_2-\mu_j}(K)}\Big)\\
&\le C\sum_{q=0}^{p}\|(g_j)_{t^q}\|^2_{H^{l_2-\mu_j-\frac{1}{2}}_{\beta_2}(S)}.
\end{aligned}$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức trên với $e^{-2\gamma t}$ rồi lấy tích phân theo t trên $\mathbb{R}$, ta được $c_{\mu,j,s} \in L^d_2(-\gamma,\mathbb{R})$. Bổ đề được chứng minh.

□

Khi vế phải của (3.11)-(3.12) có các dạng đặc biệt, sử dụng phương pháp tương tự trong [55] ta có thể chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 3.2. *Xét bài toán* (3.11)-(3.12) *với*

$$f = r^{-i\lambda_0(t)-2m}\sum_{s=0}^{M}\ln^s r f_s(\omega,t),$$

$$g_j = r^{-i\lambda_0(t)-2m+j+1}\sum_{s=0}^{M}\ln^s r g_{j,s}(\omega,t),\ j=0,\dots,m-1,$$

trong đó $f_s \in C^{\infty,d}(-\gamma, G_\infty)$, $g_{j,s} \in C^{\infty,d}(-\gamma, \partial G_\infty)$, $s = 0,\dots,M$. *Giả sử rằng nếu* $\lambda_0(t)$ *là một giá trị riêng của bó toán tử* $\mathfrak{U}(\lambda,t)$ *với giá trị nào đó của* t, *thì nó là giá trị riêng của* $\mathfrak{U}(\lambda,t)$ *với mọi* $t \in \mathbb{R}$ *với bội hình học và các bội riêng không phụ thuộc vào* $t \in \mathbb{R}$. *Khi đó, tồn tại một nghiệm của bài toán* (3.11)-(3.12) *có dạng*

$$u = r^{-i\lambda_0(t)}\sum_{s=0}^{M+\theta}\ln^s r\widehat{u}_s(\omega,t), \tag{3.23}$$

trong đó $\widehat{u}_s \in C^{\infty,d}(-\gamma, G_\infty)$; $\theta = 0$ *nếu* $\lambda_0(t)$ *không là giá trị riêng của* $\mathfrak{U}(\lambda,t)$, *ngoài ra* θ *là bội riêng lớn nhất của* $\lambda_0(t)$.

Chứng minh. Ta biết rằng, toán tử ngược của toán tử $\mathfrak{U}(\lambda,t)$ có biểu diễn sau

$$\mathfrak{U}^{-1}(\lambda,t) = \sum_{k=-\kappa}^{+\infty}\widehat{P}_k(t)\big(\lambda-\lambda_0(t)\big)^k,$$

trong đó $\widehat{P}_{-1}(t) = \sum\limits_{s=1}^{\Lambda} P_s(t)$ trong trường hợp $\kappa = 1$, và

$$P_k(t) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^k\mathfrak{P}}{\partial\lambda^k}(\lambda_0(t),t) \tag{3.24}$$

với $k = 0,1,\dots$. Rõ ràng $P_k(t)$, $k = -\kappa, -\kappa+1,\dots$, là các toán tử liên tục từ không gian $\mathcal{Y}$ vào không gian $\mathcal{X}$ và giải tích theo t trên $\mathbb{R}$. Từ đẳng thức

$$\mathfrak{U}(\lambda,t)\mathfrak{U}^{-1}(\lambda,t) = \sum_{k=-\kappa}^{+\infty}\Big(\sum_{q=0}^{\kappa+k}\frac{1}{q!}\mathfrak{U}^{(q)}(\lambda_0(t),t)P_{k-q}(t)\Big)(\lambda-\lambda_0(t))^k = I$$

ta suy ra

$$\sum_{q=0}^{\kappa+k} \frac{1}{q!}\mathfrak{U}^{(q)}(\lambda_0(t),t)P_{k-q}(t) = \delta_{k,0}, \quad k = -\kappa, -\kappa+1, \ldots, \tag{3.25}$$

trong đó $\delta_{k,l}$ là kí hiệu Kronecker. Giả sử u là hàm có biểu diễn dạng (3.23), thì

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}(ir\partial_r,t)u &= r^{-i\lambda_0(t)}\mathfrak{U}(\lambda_0(t)+r\partial_r,t)\sum_{\sigma=0}^{s+\kappa}\frac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma u_{s+\kappa-\sigma}\\
&= r^{-i\lambda_0(t)}\sum_{q=0}^{2m}\frac{1}{q!}\mathfrak{U}^{(q)}(\lambda_0(t),t)(r\partial_r)^q\sum_{\sigma=0}^{s+\kappa}\frac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma u_{s+\kappa-\sigma}\\
&= r^{-i\lambda_0(t)}\sum_{\sigma=0}^{s+\kappa}\frac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma\sum_{q=0}^{s+\kappa-\sigma}\frac{1}{q!}\mathfrak{U}^{(q)}(\lambda_0(t),t)u_{s+\kappa-\sigma-q}.
\end{aligned}$$

Đặt $v_\sigma = (f_\sigma, g_{1,\sigma}, \ldots, g_{m,\sigma})$, $\sigma = 0, \ldots, s$ và

$$u_k = \sum_{p=0}^{\min(k,s)} P_{-\kappa+k-p}(t)v_p, k = 1, \ldots, s+\kappa,$$

ta được $u_k \in H^{l,d}(\Omega_T), k = 0, \ldots, s+\kappa$. Sử dụng đẳng thức (3.24) ta có

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{U}(r\partial_r,t)u\\
&= r^{-i\lambda_0(t)}\sum_{\sigma=0}^{s+\kappa}\frac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma\sum_{q=0}^{s+\kappa-\sigma}\frac{1}{q!}\mathfrak{U}^{(q)}(\lambda_0(t),t)\sum_{p=0}^{\min(s+\kappa-\sigma-q,s)}P_{s-\sigma-q-p}(t)v_p\\
&= r^{-i\lambda_0(t)}\sum_{\sigma=0}^{s+\kappa}\frac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma\sum_{p=0}^{\min(s+\kappa-\sigma,s)}\sum_{q=0}^{s+\kappa-\sigma-p}\frac{1}{q!}\mathfrak{U}^{(q)}(\lambda_0(t),t)P_{s-\sigma-p-q}(t)v_p\\
&= r^{-i\lambda_0(t)}\sum_{p=0}^{s}\sum_{\sigma=0}^{s+\kappa-p}\frac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma\Big(\sum_{q=0}^{s+\kappa-\sigma-p}\frac{1}{q!}\mathfrak{U}^{(q)}(\lambda_0(t),t)P_{s-\sigma-p-q}(t)\Big)v_p\\
&= r^{-i\lambda_0(t)}\sum_{p=0}^{s}\sum_{\sigma=0}^{s+\kappa-p}\frac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma\delta_{s+\kappa-\sigma-p,0}v_p\\
&= r^{-i\lambda_0(t)}\sum_{p=0}^{s}\frac{1}{(s-p)!}(\ln r)^{s-p}v_p = r^{-i\lambda_0(t)}\sum_{p=0}^{s}\frac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma v_{s-\sigma}.
\end{aligned}$$

Viết lại đẳng thức này ở dạng

$$\mathcal{L}(\omega, t, \partial_\omega, r\partial_r)u = r^{2m} f \text{ trong } K_\infty,$$

$$\mathcal{B}_j(\omega, t, \partial_\omega, r\partial_r)u = r^{\mu_j} g_j \text{ trên } S_\infty,\ j = 0, \ldots, m-1.$$

Tức là u là nghiệm của bài toán (3.11)-(3.12), và như vậy, bổ đề được chứng minh. □

Tiếp theo, ta xét bài toán elliptic phụ thuộc tham số t dạng sau

$$(-1)^m L(t, D)u = f \text{ trong } K_\infty, \tag{3.26}$$

$$B_j u = g_j \text{ trên } \partial K_\infty,\ j = 0, \ldots, m-1, \tag{3.27}$$

Bổ đề 3.3. *Giả sử $u \in V^{l,0}_{\beta,d}(-\gamma, K_\infty)$ là một nghiệm suy rộng của bài toán (3.26)-(3.27), trong đó $f \in V^{l-2m+s,0}_{\beta+s,d}(-\gamma, K_\infty)$, $g_j \in V^{l-\mu_j+s-\frac{1}{2},0}_{\beta+s,d}(-\gamma, \Gamma)$, với l, s, d là các số nguyên không âm, $l \geq 2m$. Khi đó $u \in V^{l+s,0}_{\beta+s,d}(-\gamma, K_\infty)$ và thỏa mãn ước lượng*

$$\|u\|^2_{V^{l+s,0}_{\beta+s,d}(-\gamma,K_\infty)} \leq C(\|f\|^2_{V^{l-2m+s,0}_{\beta+s,d}(-\gamma,K_\infty)} + \sum_{j=0}^{m-1} \|g_j\|^2_{V^{l-\mu_j+s-\frac{1}{2},0}_{\beta+s,d}(-\gamma,\Gamma)}) \tag{3.28}$$

trong đó hằng số C không phụ thuộc vào u, f và g_j.

Chứng minh. Thật vậy, ta chỉ cần chứng minh $u_{t^k} \in H^{l+s,0}_{\beta+s}(-\gamma, K_\infty)$ và

$$\|u_{t^k}\|^2_{H^{l+s,0}_{\beta+s}(-\gamma,K_\infty)} \leq C(\|f\|^2_{H^{l-2m+s,k}_{\beta+s}(-\gamma,K_\infty)} + \sum_{j=0}^{m-1} \|g_j\|^2_{H^{l-\mu_j+s-\frac{1}{2},k}_{\beta+s}(-\gamma,\Gamma)}), \tag{3.29}$$

với $k = 0, \ldots, d$, trong đó C là hằng số không phụ thuộc vào u, f và g_j. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo d.

Cố định $t \in \mathbb{R}$ và xét bài toán (3.26), (3.27) như một bài toán biên elliptic (không phụ thuộc tham số). Áp dụng Hệ quả 6.3.2 trong [39], ta có thể suy ra $u(\cdot, t) \in H^{l+s}_{\beta+s}(K)$ và

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{H^{l+s}_{\beta+s}(K)} \leq C(\|f(\cdot,t)\|^2_{H^{l-2m+s}_{\beta+s}(K)} + \sum_{j=0}^{m-1} \|g_j(\cdot,t)\|^2_{H^{l-\mu_j+s-\frac{1}{2}}_{\beta+s}(S)}), \tag{3.30}$$

trong đó C là hằng số không phụ thuộc vào u, f, g_j và $t \in \mathbb{R}$. Nhân hai vế của bất đẳng thức này với $e^{-2\gamma t}$ và lấy tích phân hai vế đẳng thức thu được theo t trên $\mathbb{R}$ ta được

$$\|u\|^2_{H^{l+s,0}_{\beta+s}(-\gamma,K_\infty)} \leq C(\|f\|^2_{H^{l-2m+s,0}_{\beta+s}(-\gamma,K_\infty)} + \sum_{j=0}^{m-1} \|g_j\|^2_{H^{l-\mu_j+s-\frac{1}{2},0}_{\beta+s}(-\gamma,\Gamma)}). \tag{3.31}$$

Do đó, (3.29) đúng với $d = 0$.

Giả sử điều cần chứng minh đúng đến $d-1$ ($d \geq 1$). Lấy đạo hàm hai vế của (3.26) d lần theo t và sử dụng giả thiết quy nạp, ta được

$$Lu_{t^d} = f_{t^d} - \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} L_{t^{d-k}} u_{t^k} \in H^{l-2m+s,0}_{\beta+s}(-\gamma, K_\infty). \tag{3.32}$$

Tương tự, ta có

$$B_j u_{t^k} = (g_j)_{t^k} - \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} (B_j)_{t^{k-p}} u_{t^p} \in H^{l_1-\mu_j+s-\frac{1}{2},0}_{\beta+s}(-\gamma, \Gamma), \tag{3.33}$$

với $j = 0, \ldots, m-1$. Lập luận tương tự như trong (3.31), từ (3.32) và (3.33) ta có $u_{t^k} \in H^{l+s,0}_{\beta+s}(-\gamma, K_\infty)$ và đánh giá (3.29) được chứng minh. Bổ đề được chứng minh hoàn toàn. □

Bổ đề sau mô tả biểu diễn tiệm cận của nghiệm của bài toán elliptic phụ thuộc một tham số trong lân cận của điểm nón.

Bổ đề 3.4. *Lấy $u \in V^{l_1,0}_{\beta_1,d}(-\gamma, K_\infty)$ là một nghiệm của bài toán (3.26)-(3.27), trong đó $f \in V^{l_2-2m,0}_{\beta_2,d}(-\gamma, K_\infty)$, $g_j \in V^{l_2-2m+j+1/2,0}_{\beta_2,d}(-\gamma, \partial K_\infty)$ với $j = 0, \ldots, m-1$ và l_1, l_2, d là các số nguyên không âm, $l_2 \geq l_1 \geq 2m$, β_1, β_2 là các số thực thỏa mãn $l_1 - \beta_1 < l_2 - \beta_2$. Hơn nữa, giả sử rằng giả thiết (**H**) đúng cho l_1, l_2, β_1, β_2 với $N = 1$. Khi đó, nghiệm u có dạng*

$$u(x,t) = \sum_{s=0}^{\kappa-1} r^{-i\lambda_0(t)+s} P_s(\ln r) + w(x,t), \tag{3.34}$$

trong đó $w(\cdot,\cdot) \in V^{l_2,0}_{\beta_2,d}(-\gamma, K_\infty)$, $P_s(\cdot)$ *là các đa thức có bậc không vượt quá* $\theta + \kappa - 1$, *với các hệ số là các hàm trong không gian* $C^{\infty,d}(-\gamma, G_\infty)$, κ *là số nguyên bé nhất lớn hơn* $-\beta_2 + l_2 - \dfrac{n}{2} - Im\lambda_0(t)$ *với mọi* $t \in \mathbb{R}$, *và* θ *là bội riêng lớn nhất của* $\lambda_0(t)$.

Chứng minh. Ta chia đoạn $[\beta_2, \beta_1 + l_2 - l_1]$ bởi các điểm chia $\delta_0, \ldots, \delta_M$ sao cho $\delta_0 = \beta_1 + l_2 - l_1$, $\delta_M = \beta_2$ và $0 < \delta_{\varrho-1} - \delta_\varrho \le 1$, $\varrho = 1, \ldots, M$. Áp dụng Bổ đề 3.3 ta có $u \in V^{l_2,0}_{\delta_0,d}(-\gamma, K_\infty)$.

Viết lại (3.26), (3.27) ở dạng

$$(-1)^m \mathcal{L}(t,D)u = \widehat{f}(x,t) \equiv f + (-1)^m(\mathcal{L}(t,D) - L(x,t,D))u \tag{3.35}$$

$$\mathcal{B}_j(t,D)u = \widehat{g}_j(x,t) \equiv g_j + (\mathcal{B}_j - B_j)u, j = 0, \ldots, m-1. \tag{3.36}$$

Đặt $L'u = \mathcal{L}(t,D)u - L(x,t,D)u$, $B'_j u = \mathcal{B}_j u - B_j u$ ta có

$$L'u = \sum_{|p|=|q|=m} D^p(a_{pq}(0,t) - a_{pq}(x,t))D^q u + \sum_{|p|+|q|<2m} D^p a_{pq} D^q u \equiv L_1 u + L_2 u.$$

Do $|a_{pq}(0,t) - a_{pq}(x,t)| \le Cr$ với $|p| = |q| = m$ và $u \in V^{l_2,0}_{\delta_0,d}(K_\infty)$, ta có $L_1 u \in V^{l_2-2m,0}_{\delta_0-1,d}(-\gamma, K_\infty)$. Mặt khác $L_2 u \in V^{l_2-2m+1,0}_{\delta_0,d}(-\gamma, K_\infty) \subset V^{l_2-2m,0}_{\delta_0-1,d}(-\gamma, K_\infty)$. Hơn nữa ta có $\delta_0 + 1 \ge \delta_1$ và $V^{l_2-2m,0}_{\delta_0-1,d}(-\gamma, K_\infty) \subset V^{l_2-2m,0}_{\delta_1,d}(-\gamma, K_\infty)$ nên suy ra $\widehat{f} = f + L'u \in V^{l_2-2m,0}_{\delta_1,d}(-\gamma, K_\infty)$.

Tương tự như vậy ta có $\widehat{g}_j = g_j + B'_j u \in V^{l_2-k_j-\frac{1}{2},0}_{\delta_1,d}(-\gamma, \Gamma)$.

Ta chứng minh rằng nếu $-\delta_0 + l_2 - \dfrac{n}{2} < Im\lambda_0(t) < -\delta_\varrho + l_2 - \dfrac{n}{2}$ với $1 \le \varrho \le M$ với mọi t thì hàm u có biểu diễn

$$u = \sum_{s=0}^{\kappa_\varrho - 1} r^{i\lambda_0(t)+s} P_{s,\varrho}(\ln r) + u_\varrho, \tag{3.37}$$

trong đó $u_\varrho \in V^{l_2,0}_{\delta_\varrho,d}(-\gamma, K_\infty)$, $P_{s,\varrho}(\ln r)$ là các đa thức có bậc không vượt quá $\kappa_\varrho + \theta - 1$ và hệ số thuộc không gian $C^{\infty,d}(-\gamma, G_\infty)$, với κ_ϱ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn $-\delta_\varrho + l_2 - \dfrac{n}{2} - Im\lambda_0(t)$ với mọi t và θ là bội riêng lớn nhất của $\lambda_0(t)$. Để chứng minh điều này, ta sử dụng phương pháp quy nạp theo ϱ. Khi

đó từ (3.37), cho $\varrho = M$ thì bổ đề được chứng minh.

Với $\varrho = 1$ thì $\kappa_1 = 1$. Áp dụng Bổ đề 3.1, ta có

$$u(x,t) = r^{-i\lambda_0(t)} \sum_{j=1}^{\Lambda} \sum_{s=0}^{\kappa_j - 1} c_{j,s}(t) u_{j,s} + w(x,t), \tag{3.38}$$

trong đó $w \in V^{l_2,0}_{\beta_2,d}(-\gamma, K_\infty)$, $c_{j,s} \in L^d_2(-\gamma, \mathbb{R})$, $u_{j,s} = \sum\limits_{\sigma=0}^{s} \dfrac{1}{\sigma!} (\ln r)^\sigma \varphi_{j,s-\sigma}(\omega, t)$.

Do đó (3.37) đúng với $\varrho = 1$, ở đó

$$P_{0,1}(\ln r) = \sum_{s=0}^{\kappa_j - 1} c_{j,s}(t) u_{j,s}$$

là đa thức có bậc không vượt quá $\theta - 1$.

Tiếp theo, ta giả sử (3.37) đúng đến ϱ với $(1 \le \varrho \le M-1)$. Xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: $-\delta_\varrho + l_2 - \dfrac{n}{2} < Im\lambda_0(t) < -\delta_{\varrho+1} + l_2 - \dfrac{n}{2}$ với mọi t. Vì trong dải $-\delta_0 + l_2 - \dfrac{n}{2} \le Im\lambda \le -\delta_1 + l_2 - \dfrac{n}{2}$ không chứa các giá trị riêng của các toán tử tuyến tính ở hệ (3.26) - (3.27) với mọi t nên áp dụng Bổ đề 3.1 cho bài toán (3.35) - (3.36) ta có $u \in V^{l_2,0}_{\delta_2,d}(-\gamma, K_\infty)$. Bằng cách lặp lại những lý luận trên ϱ lần ta nhận được $u \in V^{l_2,0}_{\delta_\varrho,d}(-\gamma, K_\infty)$. Vì vậy $\widehat{f} \in V^{l_2-2m,0}_{\delta_{\varrho+1},d}(-\gamma, K_\infty)$. Tương tự như vậy ta có $\widehat{g}_j \in V^{l_2-2m+j-\frac{1}{2},0}_{\delta_{\varrho+1},d}(-\gamma, \Gamma)$ với mọi $j = 0, \ldots, m-1$. Vì $-\delta_\varrho + l_2 - \dfrac{n}{2} < Im\lambda_0(t) < -\delta_{\varrho+1} + l_2 - \dfrac{n}{2}$ với mọi t nên áp dụng Bổ đề 3.1 ta suy ra biểu diễn (3.37) đúng với $\varrho + 1$.

Trường hợp 2: $-\delta_0 + l_2 - \dfrac{n}{2} < Im\lambda_0(t) < -\delta_\varrho + l_2 - \dfrac{n}{2}$ với mọi t. Áp dụng giả thiết quy nạp ta có biểu diễn (3.37) với $u_\varrho \in V^{l_2,0}_{\delta_\varrho,d}(-\gamma, K_\infty)$. Đặt $S_\varrho(x,t) = \sum\limits_{s=0}^{\kappa_\varrho - 1} r^{i\lambda_0(t)+s} P_{s,\varrho}(\ln r)$, ta có

$$LS_\varrho = A_\varrho + R_\varrho, \quad B_j S_\varrho = E_{j,\varrho} + F_{j,\varrho}, \ j = 0, \ldots, m-1,$$

với

$$A_\varrho = \sum_{s=0}^{\kappa_\varrho - 1} \sum_{s+s' \le \kappa_{\varrho+1}-1} r^{-i\lambda_0(t)-2m+s+s'} P_{s,s',d}(\ln r) = \sum_{s=0}^{\kappa_{\varrho+1}-1} r^{-i\lambda_0(t)-2m+s} \widehat{P}_{s,\varrho}(\ln r),$$

$$R_\varrho = \sum_{s=0}^{\kappa_\varrho - 1} \sum_{s+s' \ge \kappa_{\varrho+1}} r^{-i\lambda_0(t)-2m+s+s'} P_{s,s',\varrho}(\ln r),$$

$$\begin{aligned} E_{j,\varrho} &= \sum_{s=0}^{\kappa_\varrho - 1} \sum_{s+s' \le \kappa_{\varrho+1}-1} r^{-i\lambda_0(t)-2m+j+1+s+s'} Q_{s,j,s',\varrho}(\ln r) \\ &= \sum_{s=0}^{\kappa_{\varrho+1}-1} r^{-i\lambda_0(t)-2m+j+1+s} \widehat{Q}_{j,s,\varrho}(\ln r), \end{aligned}$$

$$F_{j,\varrho} = \sum_{s=0}^{\kappa_\varrho - 1} \sum_{s+s' \ge \kappa_{\varrho+1}} r^{-i\lambda_0(t)-2m+j+1+s+s'} Q_{s,j,s',\varrho}(\ln r).$$

Rõ ràng $R_\varrho \in V^{l_2-2m,0}_{\delta_{\varrho+1},d}(-\gamma, K_\infty)$ và $F_{j,\varrho} \in V^{l_2-2m+j+\frac{1}{2},0}_{\delta_{\varrho+1},d}(-\gamma, \Gamma)$ nên áp dụng Bổ đề 3.2 ta suy ra tồn tại hàm v_ϱ thỏa mãn

$$v_\varrho = \sum_{s=0}^{\kappa_{\varrho+1}-1} r^{i\lambda_k(t)+s} \widehat{P}_{s,\varrho+1}(\ln r)$$

sao cho

$$\mathcal{L}(t,D)v_\varrho = -A_\varrho,$$

$$\mathcal{B}_j(t,D)v_\varrho = -E_{j,\varrho},\ j = 0, \dots, m-1.$$

Trong đó $\widehat{P}_{s,\varrho+1}(\ln r)$ có bậc không vượt quá $\theta + \kappa_{\varrho+1} - 1$. Từ (3.37) ta có

$$\mathcal{L}(t,D)u_\varrho = \widehat{f}_\varrho - A_\varrho,$$

$$\mathcal{B}_j(t,D)u_\varrho = \widehat{g}_{j,\varrho} - E_{j,\varrho},\ j = 0, \dots, m-1,$$

trong đó $\widehat{f}_\varrho = f + (-1)^m L'(t,D)u_\varrho - (-1)^m R_\varrho,\ \widehat{g}_{j,\varrho} = g_j + B'_j(t,D)u_\varrho - F_{j,\varrho}$. Vì vậy

$$\mathcal{L}(t,D)[u_\varrho - v_\varrho] = \widehat{f}_\varrho \in V^{l_2-2m,0}_{\delta_{\varrho+1},d}(-\gamma, K_\infty),$$

$$\mathcal{B}_j(t,D)[u_\varrho - v_\varrho] = \widehat{g}_{j,\varrho} \in V^{l_2-2m+f+\frac{1}{2},0}_{\delta_{\varrho+1},d}(-\gamma, \Gamma),\ j = 0, \dots, m-1.$$

Sử dụng Bổ đề 3.1 cho dải phổ $-\delta_0 + l_2 - \dfrac{n}{2} < Im\lambda_0(t) < -\delta_{\varrho+1} + l_2 - \dfrac{n}{2}$ với chú ý rằng $u_\varrho - v_\varrho \in V^{l_2,0}_{\delta_{\varrho+1},d}(-\gamma, K_\infty)$, ta nhận được

$$u_\varrho - v_\varrho = r^{-i\lambda_0(t)} \sum_{j=1}^{\Lambda} \sum_{s=0}^{\kappa_j - 1} c_{j,s}(t) u_{j,s} + u_{d+1}. \tag{3.39}$$

Từ (3.37) và (3.39) ta suy ra

$$u = \sum_{s=0}^{\kappa_{\varrho+1}} r^{i\lambda_k(t)+s} P_{s,\varrho+1}(\ln r) + u_{\varrho+1}, \tag{3.40}$$

trong đó $P_{0,\varrho+1} = P_{0,\varrho} + \widehat{P}_{0,\varrho+1} + \sum\limits_{j=1}^{\Lambda} \sum\limits_{s=0}^{\kappa_j-1} c_{j,s}(t) u_{j,s}$, $P_{s,\varrho+1} = P_{s,\varrho} + \widehat{P}_{s,\varrho+1}$ với mọi $s = 1, \ldots, \kappa_\varrho - 1$ và $P_{s,\varrho+1} = \widehat{P}_{s,\varrho+1}$ với $s = \kappa_{\varrho+1} - 1$. Vì vậy biểu diễn (3.37) cũng đúng cho $\varrho + 1$.

Trường hợp 3: Tồn tại t_0 sao cho $Im\lambda_0(t_0) = -\delta_\varrho + l + 2 - \dfrac{n}{2}$. Không mất tính tổng quát ta có thể coi $-\delta_\varrho - \epsilon + l_2 - \dfrac{n}{2} < Im\lambda_0(t) < -\delta_{\varrho+1} - \epsilon + l_2 - \dfrac{n}{2}$. Khi đó lặp lại các chứng minh trong trường hợp 1 và sử dụng lí luận tương tự như trường hợp 2 ta thu được (3.37). Vậy bổ đề được chứng minh. □

3.3. Biểu diễn tiệm cận nghiệm của bài toán biên không có điều kiện ban đầu đối với hệ Schrödinger trong lân cận điểm nón

Bây giờ ta quay trở lại nghiên cứu bài toán biên Dirichlet không có điều kiện ban đầu cho hệ Schrödinger (1.2)-(1.3). Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 3.5. *Lấy $\gamma > (2d+1)\gamma_0$, $u \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ là một nghiệm của bài toán (1.2)-(1.3) sao cho $u \equiv 0$ ở ngoài $\widehat{U}_0$, $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, K_\infty)$, $k \le d+2$. Hơn nữa, giả sử rằng giả thiết (**H**) được thỏa mãn cho $l_1 = l_2 = 2m$ và $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = \beta'$ với $N = 1$, trong đó β, β' là các số thực thỏa mãn $\beta \ge m$ và $0 \le \beta' < \beta$. Khi đó, nghiệm u có biểu diễn*

$$u(x,t) = \sum_{s=0}^{\kappa-1} r^{-i\lambda_0(t)+s} P_s(\ln r) + w(x,t), \tag{3.41}$$

trong đó $w(\cdot,\cdot) \in V^{2m,0}_{\beta',d}(-\gamma, K_\infty)$, $P_s(\cdot)$ *là các đa thức có bậc không vượt quá* $\theta + \kappa - 1$, *với các hệ số thuộc không gian* $C^{\infty,d}(-\gamma, G_\infty)$, κ *là số nguyên nhỏ nhất không vượt quá* $-\beta' + 2m - \dfrac{n}{2} - Im\lambda_0(t)$ *với mọi* $t \in \mathbb{R}$, *và* θ *là bội riêng lớn nhất của giá trị riêng* $\lambda_0(t)$.

Chứng minh. Viết lại bài toán (1.2)-(1.3) dưới dạng

$$(-1)^m L(x,t,D)u = F(x,t) \text{ trong } Q, \tag{3.42}$$

$$B_j u \mid_\Gamma = 0, \quad j = 0, \ldots, m-1, \tag{3.43}$$

trong đó $F = i(u_t + f)$.

Ta sẽ chứng minh rằng $F \in V^{0,0}_{\beta',d}(-\gamma, K_\infty)$ và $u \in V^{2m,0}_{\beta,d}(-\gamma, K_\infty)$, tức là $F_{t^k} \in H^{0,0}_{\beta'}(-\gamma, K_\infty)$, $u_{t^k} \in H^{2m,0}_{\beta}(-\gamma, \infty)$ với mọi $k = 0, \ldots, d$.
Vì $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, K_\infty)$, $k \le d+2$, áp dụng Định lí 2.3 ta suy ra với mọi $k \le d$ thì $u_{t^k} \in H^{m,0}(-\gamma, K_\infty)$. Tương tự, do Bổ đề 2.1 trong [26], ta có $u_{t^k} \in H^{2m,0}_m(-\gamma, K_\infty)$.

Chú ý rằng, vì $\beta \ge m$ nên $H^{2m,0}_m(-\gamma, K_\infty) \subset H^{2m,0}_\beta(-\gamma, K_\infty)$. Vì vậy ta có $u \in V^{2m,0}_{\beta,d}(-\gamma, K_\infty)$.

Mặt khác, ta có $F = i(u_t + f) \in V^{0,0}_{0,d}(-\gamma, K_\infty) \subset V^{0,0}_{\beta',d}(-\gamma, K_\infty)$ nên áp dụng Bổ đề 3.4 cho bài toán (3.42)-(3.43) ta suy ra biểu diễn (3.41). Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 3.6. *Lấy* d, l *là các số nguyên không âm và* $\gamma > (2(d+l)+1)\gamma_0$. *Giả sử* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ *là một nghiệm của bài toán* (1.2)-(1.3) *sao cho* $u \equiv 0$ *ở ngoài* $\widehat{U}_0$, $f_{t^k} \in H^{l,0}_0(-\gamma, K_\infty)$, $k \le d + 2l + 2$. *Hơn nữa, ta giả sử rằng giả thiết (**H**) đúng cho các số* $l_1 = 2m$, $l_2 = 2m + l$, $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = \beta'$ *với* $N = 1$, *trong đó* β, β' *là các số thực thỏa mãn* $\beta \ge m$ *và* $0 \le \beta < \beta'$. *Khi đó, nghiệm* u *có biểu diễn*

$$u(x,t) = \sum_{s=0}^{l+\kappa-1} r^{-i\lambda_0(t)+s} P_s(\ln r) + w(x,t), \tag{3.44}$$

trong đó $w(\cdot,\cdot) \in V^{2m+l,0}_{\beta',d+l}(-\gamma, K_\infty)$, $P_s(\cdot)$ *là các đa thức có bậc không vượt quá* $l(\theta+2)+\theta+\kappa-1$, *với các hệ số thuộc không gian* $C^{\infty,d}(-\gamma, G_\infty)$, κ *là số nguyên nhỏ nhất không vượt quá* $-\beta'+2m-\dfrac{n}{2}-Im\lambda_0(t)$ *với mọi* $t \in \mathbb{R}$, *và* θ *là bội riêng lớn nhất của giá trị riêng* $\lambda_0(t)$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo l. Với $l=0$, bổ đề được chứng minh do áp dụng Bổ đề 3.5. Giả sử rằng khẳng định của bổ đề này đúng đến $l-1$. Ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với l. Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $-\beta+2m-\dfrac{n}{2} < Im\lambda_0(t) < -\beta'+2m-\dfrac{n}{2}+l-1, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Sử dụng giả thiết quy nạp ta có biểu diễn sau

$$u(x,t) = \sum_{s=0}^{l+\kappa-2} r^{-i\lambda_0(t)+s} P_s(\ln r) + u_1(x,t), \tag{3.45}$$

trong đó $u_1(\cdot,\cdot) \in V^{2m+l-1,0}_{\beta',d+l-1}(-\gamma, Q)$, $P_s(\cdot)$ là các đa thức có bậc không vượt quá $(l-1)(\theta+2)+\kappa+\theta-1$, với các hệ số là các hàm trong không gian $C^{\infty,d+l-1}(-\gamma, G_\infty)$.

Đặt $S = \sum\limits_{s=0}^{l+\kappa-2} r^{-i\lambda_0(t)+s} P_s(\ln r)$, thì (1.2) được viết lại ở dạng sau

$$(-1)^m \mathcal{L}(t,D)u_1 = F_1 + (-1)^{m-1} L(x,t,D)S - iS_t, \tag{3.46}$$

trong đó $F_1 = iu_t + if + (-1)^m \mathcal{L}_1(x,t,D)u_1$, $\mathcal{L}_1(x,t,D) = \mathcal{L}(t,D) - L(x,t,D)$.

Mặt khác

$$(-1)^{m-1} L(x,t,D)S - iS_t = F_2 + \sum_{s=0}^{l+\kappa-1} r^{-i\lambda_0(t)-2m+s} \widehat{P}_s(\ln r), \tag{3.47}$$

trong đó $\widehat{P}_s(\cdot)$ là đa thức có bậc không vượt quá $(l-1)(\theta+2)+\kappa+\theta+1$, và $F_2 \in V^{l,0}_{\beta',d+l}(-\gamma, K_\infty)$. Theo Bổ đề 3.2, tồn tại hàm

$$v = \sum_{s=0}^{l+\kappa-1} r^{-i\lambda_0(t)+s} \widehat{P}_s(\ln r), \tag{3.48}$$

trong đó bậc của đa thức $\widehat{P}_s(\cdot)$ không vượt quá $l(\theta+2)+\kappa+\theta-1$, sao cho

$$(-1)^m\mathcal{L}(t,D)v=\sum_{s=0}^{l+\kappa-1} r^{-i\lambda_0(t)-2m+s}\widehat{P}_s(\ln r).$$

Vì vậy ta có

$$(-1)^m\mathcal{L}(t,D)(u_1-v)=F_3, \tag{3.49}$$

trong đó $F_3=F_1+F_2\in V^{l,0}_{\beta',d+l}(-\gamma,K_\infty)$.
Hơn nữa, từ đẳng thức (6.1.4) trong [39] thì chuẩn trong không gian $H^{2m+l-1}_{\beta+l-1}(K)$ tương đương với chuẩn sau

$$||v||^2_{H^{2m+l-1}_{\beta+l-1}(K)}=\int_0^R r^{2(\beta-2m)+n-1}\sum_{j=0}^{2m+l-1}||(r\partial r)^j v(\cdot,r)||^2_{H^{2m+l-1}(G)}dr. \tag{3.50}$$

Thay v từ (3.48) vào (3.50) và chú ý rằng tích phân $\int_0^R r^p(\ln r)^q dr$ hội tụ với $p>-1$, $q>-1$, ta suy ra $v\in V^{2m+l-1,0}_{\beta+l-1,d+l}(-\gamma,K_\infty)$. Tiếp tục áp dụng Bổ đề 3.1 với chú ý rằng $u_1-v\in V^{2m+l-1,0}_{\beta+l-1,d+l}(-\gamma,K_\infty)$ ta suy ra

$$u_1-v=\sum_{j=1}^{\Lambda}\sum_{s=0}^{\theta-1}\sum_{\sigma=0}^{s}\frac{1}{\sigma!}\ln^\sigma r\varphi_{j,s-\sigma}(\omega,t)c_{j,s}(t)+u_2(x,t), \tag{3.51}$$

trong đó $u_2\in V^{l+2m,0}_{\beta',d+l}(-\gamma,K_\infty)$. Từ (3.45), (3.48) và (3.51) suy ra kết luận của bổ đề đúng cho l. Theo nguyên lí quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp 2. $-\beta'+2m-\dfrac{n}{2}+l-1<Im\lambda_0(t)<-\beta'+2m-\dfrac{n}{2}+l$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

Do Định lí 2.2 và chứng minh tương tự [37, Bổ đề 3.1], ta suy ra rằng với $k\le d+2l$ thì $u_{t^k}\in H^{2m,0}_m(-\gamma,K_\infty)$. Dải $-\beta+2m-\dfrac{n}{2}<Im\lambda<-\beta'+2m-\dfrac{n}{2}$ không chứa các điểm phổ của bó toán tử $\mathfrak{U}(\lambda,t)$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Điều này cùng với kết quả về tính trơn của nghiệm của bài toán elliptic trong miền có điểm nón (chẳng hạn xem trong Bổ đề 3.4) ta suy ra $u_{t^k}\in H^{2m,0}_{\beta'}(-\gamma,K_\infty)$, $k\le d+2l$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng nếu $f_{t^k}\in H^{j,0}_{\beta'}(-\gamma,K_\infty)$, $k\le 2j+d+2$ thì $u\in V^{2m+j,0}_{\beta',d+2l-j}(-\gamma,K_\infty)$, $j\le l-1$. Thật vậy, khẳng định đúng với $j=0$. Giả sử khẳng định đúng đến $j-1$.

Do $f_{t^k} \in H^{j-1,0}_{\beta'}(-\gamma, K_\infty)$, $k \le 2(j-1)+(d+2)+2$, nên theo giả thiết quy nạp ta suy ra với $k \le d+2l-j+3$ thì có $u_{t^k} \in H^{2m+j-1,0}_{\beta'}(-\gamma, K_\infty)$, tức là $u_{t^{k+1}} \in H^{2m+j-1,0}_{\beta'}(-\gamma, K_\infty)$, $k \le d+2l-j+2$. Áp dụng Bổ đề 3.4 ta có $u \in V^{2m+j-1,0}_{\beta'-1,d+2l-j}(-\gamma, K_\infty)$. Do Bổ đề 6.1.3 trong [39], $u \in V^{2m+j}_{\beta',d+2l-j}(-\gamma, K_\infty)$. Điều này có nghĩa là khẳng định đúng với mọi $j \le l-1$. Đặc biệt, cho $j = l-1$ ta có $u \in V^{2m+l-1,0}_{\beta',d+l+1}(-\gamma, K_\infty)$. Do $F \in V^{l,0}_{\beta',d+l}(-\gamma, K_\infty)$ nên áp dụng Bổ đề 3.4, ta có biểu diễn (3.44).

Trường hợp 3. Tồn tại t_0 sao cho $Im\lambda_0(t_0) = -\beta' + 2m - \dfrac{n}{2} + l - 1$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $-\beta'+2m-\dfrac{n}{2}+l-1-\eta < Im\lambda_0(t) < -\beta'+2m-\dfrac{n}{2}+l-1-\eta+1$, với mọi $t \in \mathbb{R}$ và $0 < \eta < 1$. Bằng cách sử dụng lập luận tương tự như trong trường hợp 1 và trường hợp 2, ta có biểu diễn (3.44). Như vậy bổ đề được chứng minh hoàn toàn. □

Kết quả chính của chương này có thể phát biểu như sau:

Định lí 3.1. *Giả sử d, l là các số nguyên không âm, β, β' là các số thực thỏa mãn $0 \le \beta' < \beta$ và $\beta \ge m$. Giả thiết rằng $u \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ là một nghiệm suy rộng của bài toán (1.2)-(1.3) với $\gamma > (2(d+l)+1)\gamma_0$ trong đó $f_{t^k} \in H^{l,0}_0(-\gamma, Q)$, với $k \le d+2l+2$ và giả thiết (**H**) cho các số $l_1 = 2m$, $l_2 = 2m+l$, $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = \beta'$ được thỏa mãn. Hơn nữa giả sử rằng tồn tại $T > 0$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:*

i. $Im\lambda_1(t) < \cdots < Im\lambda_N(t)$, $t \in [-T, T]$;

ii. $-\beta + 2m - \dfrac{n}{2} < Im\lambda_1(t) < -\beta + 2m - \dfrac{n}{2} + \mu_1^\star < Im\lambda_2(t) < \cdots < -\beta + 2m - \dfrac{n}{2} + \mu_{N-1}^\star < Im\lambda_N(t) < -\beta' + 2m + l - \dfrac{n}{2}$, $t \in [-\infty, -T) \cup (T, \infty]$;

iii. $Im\lambda_j(t) \ne Im\lambda_k(t) + z$, $z \in \mathbb{Z}$, $j \ne k \in \{1, \ldots, N\}$, $t \in \mathbb{R}$.

Khi đó ta có biểu diễn sau:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=0}^{l+\kappa_j-1} r^{-i\lambda_j(t)+s} P_{s,j}(\ln r) + w(x,t), \tag{3.52}$$

trong đó $w(\cdot,\cdot) \in V^{2m+l,0}_{\beta',d+l}(-\gamma, Q)$, $P_{s,j}(\cdot)$ *là các đa thức có bậc không vượt quá* $l(\theta_j+2)+\kappa_j+\theta_j-1$, *với các hàm hệ số thuộc không gian* $C^{\infty,d+l}(-\gamma, G_\infty)$, κ_j *là số nguyên nhỏ nhất không vượt quá* $-\beta'+2m-\dfrac{n}{2}-Im\lambda_j(t)$ *với mọi* $t \in \mathbb{R}$, $j=1,\dots,N$ *và* θ_j *là bội riêng lớn nhất của giá trị riêng* $\lambda_j(t)$ *với* $j=1,\dots,N$.

Chứng minh. 1. Trước tiên ta xét trường hợp $u \equiv 0$ ở ngoài $\widehat{U}_0$.

Do tính compact của đoạn $[-T,T]$ và tính liên tục của các hàm $\lambda_j(t)$ trên $\mathbb{R}$, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử tồn tại các hằng số không âm $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{N-1}$ sao cho

$$\begin{aligned}
&-\beta+2m-\frac{n}{2} < Im\lambda_1(t) < -\beta+2m-\frac{n}{2}+\mu_1 < Im\lambda_2(t)\\
&< -\beta+2m-\frac{n}{2}+\mu_2 < \cdots < -\beta+2m-\frac{n}{2}+\mu_{N-1}\\
&< Im\lambda_N(t) < -\beta'+2m+l-\frac{n}{2}, \qquad t\in[-T,T].
\end{aligned}$$

Để chứng minh định lí, ta sử dụng phương pháp quy nạp theo N. Với $N=1$ khẳng định của định lí đúng do Bổ đề 3.6. Giả sử rằng khẳng định của định lí đúng đến $N-1$.

Đặt $\mu_0^\star = \max\{\mu_{N-1}, \mu_{N-1}^\star\}$, $l_0 = [\mu_0^\star - \beta + \beta']$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $0 \le l_0 < l$. Khi đó $-\beta+\mu_0^\star = -\beta'+l_0+\delta$, $\delta\in[0,1)$. Đặt $\beta_1 = \beta'-\delta$, khi đó dải $-\beta+2m-\dfrac{n}{2} < Im\lambda < -\beta_1+2m-\dfrac{n}{2}+l_0$ chứa đúng $N-1$ giá trị riêng, do giả thiết quy nạp nên u thỏa mãn biểu diễn sau

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{s=0}^{l_0+\kappa_j-1} r^{-i\lambda_j(t)+s}P_{s,j}(\ln r) + u_1(x,t), \tag{3.53}$$

trong đó $u_1 \in V^{2m+l_0,0}_{\beta',d+l_0}(-\gamma, K_\infty)$, $P_{s,j}$ là các đa thức có bậc không vượt quá $l_0(\theta_j+2)+\kappa_j+\theta_j-1$ với các hệ số thuộc không gian $C^{\infty,d+l_0}(-\gamma, G_\infty)$. Lập luận tương tự như trong chứng minh trường hợp 1 của Bổ đề 3.6, ta suy ra nếu $-\beta_1+2m+l_1-\dfrac{n}{2} < Im\lambda_N(t) < -\beta_1+2m+l_1+1-\dfrac{n}{2}$ với $l_0 \le l_1 < l$, thì có biểu diễn (3.52) trong đó $w \in V^{2m+l_1+1,0}_{\beta_1,d+l_1+1}(-\gamma, K_\infty)$.

Vì dải $-\beta_1 + 2m + l_1 + 1 - \dfrac{n}{2} \leq Im\lambda \leq -\beta' + 2m + l - \dfrac{n}{2}$ không chứa giá trị riêng nào của toán tử $\mathfrak{U}(\lambda, t)$ nên ta có biểu diễn (3.52) với $w \in V^{2m+l,0}_{\beta',d+l}(-\gamma, K_\infty)$.

Nếu tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $Im\lambda_N(t_0) = -\beta_1 + 2m + l_1 - \dfrac{n}{2}$, bằng cách lặp lại các lập luận trong trường hợp 3 trong chứng minh Bổ đề 3.6 ta thu được công thức (3.52).

2. Trường hợp tổng quát: Xét hàm $\varphi_0 \in C_0^\infty(\widehat{U}_0)$ sao cho $\varphi_0 \equiv 1$ trong một lân cận của gốc tọa độ 0. Ta định nghĩa hàm $u_0 = \varphi_0 u$, thỏa mãn hệ sau

$$(-1)^{m-1} iL(x,t,D)u_0 - (u_0)_t = \varphi_0 f + L'(x,t,D)u,$$

trong đó $L'(x,t,D)$ là toán tử tuyến tính bậc không vượt quá $2m$, với các hệ số của toán tử này phụ thuộc vào cách chọn hàm φ_0 và bằng 0 ở ngoài $\widehat{U}_0$.. Các hàm u_0 và $\widehat{f} = \varphi_0 f + L'(x,t,D)u$ thỏa mãn các giả thiết ở trường hợp 1, vì vậy u_0 có biểu diễn dạng (3.52).

Mặt khác, nếu ta kí hiệu $u_1 = (1 - \varphi_0)u$, thì u_1 bằng 0 trong một lân cận của điểm nón. Sử dụng các kết quả về tính trơn của nghiệm của bài toán elliptic trong miền trơn, ta có thể kết luận rằng $(u_1)_{t^k} \in H^{2m+l}_{\beta'}(\Omega)$ với mọi $k \leq d + l$ và hầu khắp t. Vì vậy $u = u_0 + u_1$ cũng thỏa mãn biểu diễn (3.52). Định lí được chứng minh. □

3.4. Các ví dụ áp dụng

Trong phần này, chúng tôi xét bài toán biên Dirichlet cho phương trình Schrödinger cấp hai hai biến tổng quát trong miền góc. Từ đó, chúng tôi chỉ ra một ví dụ cụ thể mà ở đó các giá trị riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}$ phụ thuộc tường minh vào biến thời gian t. Và cuối cùng, như một trường hợp đặc biệt, chúng tôi quay trở lại xét phương trình Schrödinger trong cơ học lượng tử.

3.4.1. Ví dụ 1

Ở ví dụ này, chúng tôi xét bài toán biên mẫu cho toán tử cấp hai trong miền góc. Xét miền góc $K = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ 0 < \omega < \omega_0\}$, ở đây (r, ω) là tọa cực trong mặt phẳng của điểm $x = (x_1, x_2)$ và $0 < \omega_0 < 2\pi$.

Đặt $S^0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \omega = 0\},\ S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \omega = \omega_0\}$ và đặt $S^j_\infty = S^j \times \mathbb{R},\ j = 0, 1$. Với mỗi đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, ta kí hiệu $\alpha_1 + \alpha_2 = |\alpha|$ và $\partial^\alpha_x = \partial^{|\alpha|}/\partial^{\alpha_1}_{x_1}\partial^{\alpha_2}_{x_2}$.

Trong mục này, chúng tôi xét bài toán sau

$$iLu - u_t = f \text{ trong } K_\infty, \tag{3.54}$$

với điều kiện biên Dirichlet

$$u\,|_{S^j_\infty} = 0,\ j = 0, 1, \tag{3.55}$$

ở đó $L = L(x, t, \partial_x) = \sum_{j,k=1}^2 a_{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k}$ là toán tử elliptic thuần nhất cấp hai tự liên hợp hình thức trong K với $a_{jk}(t) = a_{kj}(t)$ là các hàm xác định trong $\mathbb{R}$. Hơn nữa, giả sử rằng bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\sum_{j,k=1}^{2} a_{jk}(t)\eta_j\overline{\eta_k} \geq \rho_1|\eta|^2, \tag{3.56}$$

với mọi $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^2,\ t \in \mathbb{R}$, trong đó ρ_1 là một hằng số dương. Phần chính của toán tử L tại gốc tọa độ O có dạng

$$\mathcal{L}(t, \partial_x) = \sum_{j,k=1}^{2} a_{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k}.$$

Từ điều kiện (3.56) ta suy ra rằng tồn tại hằng số ρ_2 sao cho $a_{jj}(t) \geq \rho_2$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Do đó, ta có thể giả sử $a_{22}(t) \equiv 1$ và khi đó ta biểu diễn toán tử $\mathcal{L}$ ở dạng

$$\mathcal{L} = (\partial_{x_2} - a(t)\partial_{x_1})(\partial_{x_2} - \overline{a(t)}\partial_{x_1}), \tag{3.57}$$

trong đó $a(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, và $\alpha(t),\ \beta(t)$ là các hàm thực trên $\mathbb{R}$, $\beta(t) \geq \rho_3$ với mọi t và ρ_3 là một hằng số dương. Tập phổ của các toán tử tuyến tính trong hệ (3.1)-(3.2) trong trường hợp này trở thành

$$\mathcal{L}(\omega, t, \lambda, D_\omega)u = f, \text{ trong } K_\infty, \tag{3.58}$$

$$u\mid_{\omega=0} = 0, \tag{3.59}$$

$$u\mid_{\omega=\omega_0} = 0, \tag{3.60}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\omega, t, \lambda, D_\omega) =& \Big((-\sin\omega + a(t)\cos\omega)i\lambda + (\cos\omega + a(t)\sin\omega)\partial_\omega\Big)\\ &\Big((-\sin\omega + \overline{a(t)}\cos\omega)i\lambda + (\cos\omega + \overline{a(t)}\sin\omega)\partial_\omega\Big).\end{aligned} \tag{3.61}$$

Và bó toán tử tương ứng với bài toán (3.58)-(3.60) trong trường hợp này được xác định bởi

$$\mathfrak{U}(\lambda, t) = (\mathcal{L}(\omega, t, \lambda, D_\omega), 1, 1).$$

Nếu $\lambda = 0$ thì $u_1 = 1$ và $u_2 = \omega$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (3.58). Do vậy, nếu nghiệm tổng quát $u = c_1(t)u_1 + c_2(t)u_2$ của (3.59) thỏa mãn điều kiện (3.60) thì ta có $c_1(t) = c_2(t) \equiv 0$. Do đó $\lambda = 0$ không là giá trị riêng của toán tử $\mathfrak{U}$ với mọi t. Nếu $\lambda \neq 0$ thì ta dễ dàng kiểm tra được

$$v_1(\omega, t) = e^{-i\lambda\vartheta(\omega,t)},\ v_1(\omega, t) = e^{-i\lambda\overline{\vartheta(\omega,t)}}, \tag{3.62}$$

là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (3.58), trong đó

$$\vartheta(\omega, t) = \int_0^\omega \zeta(\theta, t)d\theta,\ \zeta(\omega, t) = \frac{-sin\omega + a(t)\cos\omega}{\cos\omega + a(t)\sin\omega}. \tag{3.63}$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình này là $u = c_1(t)v_1 + c_2(t)v_2$. Từ (3.59)-(3.60), nếu λ là một giá trị riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}$ thì λ phải thỏa mãn phương trình sau

$$D(\lambda, t) = e^{-i\lambda\overline{\vartheta(\omega_0,t)}} - e^{-i\lambda\vartheta(\omega_0,t)} = 0. \tag{3.64}$$

Vì vậy

$$e^{2\lambda Im\vartheta(\omega_0,t)} = 1. \tag{3.65}$$

Mặt khác,

$$Re\vartheta(\omega,t) = \frac{1}{2}\ln\frac{Z^2(\omega,t)+1}{\tan^2\omega+1} + \ln\frac{|\beta(t)|}{\sqrt{\alpha^2(t)+\beta^2(t)}},$$

$$Im\vartheta(\omega,t) = \begin{cases} \arctan Z(\omega,t) - \arctan\dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)}, & \omega\in(0,\dfrac{\pi}{2}]; \\ \arctan Z(\omega,t) - \arctan\dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)} + 2\pi, & \omega\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}]; \\ \arctan Z(\omega,t) - \arctan\dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)} + 4\pi, & \omega\in(\dfrac{3\pi}{2},2\pi), \end{cases}$$

trong đó $Z(\omega,t) = \dfrac{\alpha^2(t)+\beta^2(t)}{\beta(t)}\tan\omega + \dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)}$. Chú ý rằng $Im\vartheta(\omega,t) > 0$ với mọi $\omega\in(0,2\pi)$ và mọi t. Vì vậy các nghiệm của phương trình (3.65) là

$$\lambda_k(t) = \frac{ik\pi}{Im\vartheta(\omega_0,t)},\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{3.66}$$

Đây cũng chính là tất cả các giá trị riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}(\lambda,t)$. Với mỗi $t\in\mathbb{R}$ cố định, ta có

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}D(\lambda,t)\mid_{\lambda=\lambda_k(t)} &= e^{\lambda_k(t)\overline{\vartheta(\omega_0,t)}}\overline{\zeta(\omega_0,t)} - e^{\lambda_k(t)\vartheta(\omega_0,t)}\zeta(\omega_0,t) \\ &= e^{\lambda_k(t)\vartheta(\omega_0,t)\zeta(\omega_0,t)}(\overline{\zeta(\omega_0,t)} - \zeta(\omega_0,t)) \\ &= -\frac{\beta(t)e^{\lambda_k(t)\vartheta(\omega_0,t)}}{(\cos\omega_0 + a(t)\sin\omega_0)(\cos\omega_0 + \overline{a(t)}\sin\omega_0)} \neq 0. \end{aligned}$$

Vì vậy áp dụng Bổ đề 3.1.1 và Bổ đề 3.1.2 trong [40], ta suy ra với mọi $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, thì các giá trị riêng $\lambda_k(t)$ là các giá trị riêng đơn của bó toán tử $\mathfrak{U}(\lambda,t)$. Với mỗi giá trị riêng $\lambda_k(t)$, chọn $c_1(t) = \dfrac{1}{2}$, $c_2(t) = -\dfrac{1}{2}$ thì vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_k(t)$ là

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{2}(e^{-i\lambda_k\vartheta(\omega,t)} + e^{-i\lambda_k\overline{\vartheta(\omega,t)}}) = e^{\dfrac{kRe\vartheta(\omega,t)\pi}{Im\vartheta(\omega,t)}}\sin\frac{kIm\vartheta(\omega,t)\pi}{\vartheta(\omega_0,t)}.$$

Tổng hợp các kết quả tính toán ở trên, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.1. *Giả sử $u(x,t)$ là nghiệm của bài toán (3.54)-(3.55) với toán tử vi phân L có phần chính tại gốc tọa độ biểu diễn ở dạng (3.57), trong đó hàm $a(t)$ giải tích. Giả sử $f_{t^k} \in H_0^{l,0}(-\gamma, Q)$ với $k \leq d$, các đường thẳng $Im\lambda = 0$, $Im\lambda = 1$ không chứa các hàm giá trị riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}$ và trong dải $0 < Im\lambda < 1$ có các hàm giá trị riêng đơn $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_N(t)$ của bài toán (3.58)-(3.60) với mọi t. Khi đó ta có biểu diễn sau:*

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=0}^{\kappa_j - 1} r^{-i\lambda_j(t)+s} P_{s,j}(\ln r) + w(x,t), \tag{3.67}$$

trong đó $w(\cdot,\cdot) \in V_{0,d}^{2,0}(-\gamma, Q)$, $P_{s,j}$ là các đa thức có bậc không vượt quá κ_j, với các hàm hệ số thuộc không gian $C^{\infty,d}(-\gamma, G_\infty)$, κ_j là số nguyên nhỏ nhất không vượt quá $1 - Im\lambda_j(t)$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, N$.

3.4.2. Ví dụ 2

Trong mục này, sử dụng kết quả tính toán trong mục 3.4.1., chúng tôi đưa ra một trường hợp đặc biệt khi các giá trị riêng của các toán tử tuyến tính được xét phụ thuộc thực sự vào biến thời gian t.

Lấy $\omega_0 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi), \alpha(t) \equiv 0, \beta(t) = \dfrac{\tan \dfrac{\omega_0}{1 + \epsilon\omega_0 \arctan \sigma(t)}}{\tan \omega_0}$, $\epsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho $\beta(t) \geq \rho_3 > 0$ và $\sigma(t)$ được chọn sao cho $|a'(t)| = o(e^{2\gamma t})$ khi $t \to -\infty$. Khi đó

$$\lambda_k(t) = \frac{ik\pi}{\omega_0} + ik\pi\epsilon \arctan \sigma(t). \tag{3.68}$$

Vì $\dfrac{-\pi}{\omega_0} < 0 < \dfrac{\pi}{\omega_0} < 1 < \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, nên ta có thể chọn $\epsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho dải $0 \leq Im\lambda \leq 1$ chỉ chứa đúng một giá trị riêng $\lambda_1 = \dfrac{i\pi}{\omega_0} + i\pi\epsilon \arctan \sigma(t)$ và giá trị riêng này không nằm trên các đường thẳng $Im\lambda = 0$, $Im\lambda = 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Khi đó, áp dụng Định lí 3.1, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.2. *Lấy $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, \mathbb{R})$ với $0 \leq k \leq d+2$ và u là một nghiệm suy rộng của bài toán (3.54)-(3.55). Khi đó, ta có biểu diễn*

$$u(x,t) = cr^{\pi/\omega_0 + \pi\epsilon \arctan \sigma(t)} + u_1(x,t),$$

trong đó $u_1 \in V^{2,0}_{0,d}(-\gamma, Q)$ *và* $c \in C^{\infty,d}(-\gamma, G_\infty)$.

3.4.3. Ví dụ 3

Trong mục này, chúng tôi xét mô hình toán học cho phương trình Schrödinger như sau:

$$i\Delta u - u_t = f \text{ trong } Q, \tag{3.69}$$

với điều kiện biên Dirichlet

$$u\,|_\Gamma = 0. \tag{3.70}$$

Khi chuyển sang tọa độ cực (r, ω) trong $\mathbb{R}^n$, ta viết lại toán tử Laplace ở dạng sau

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\omega, \tag{3.71}$$

trong đó Δ_ω là toán tử Laplace-Beltrami trên mặt cầu S^{n-1}. Khi đó, tập phổ của các toán tử tuyến tính tương ứng sẽ là

$$\Delta_\omega v + (i\lambda)^2 + i(2-n)\lambda v = 0,\ \omega \in G, \tag{3.72}$$

$$v\,|_{\partial G} = 0. \tag{3.73}$$

Với $n = 2$. Giả sử rằng trong một lân cận của gốc tọa độ, $\partial\Omega$ trùng với góc có độ lớn là ω_0. Khi đó tập phổ của các toán tử tuyến tính trong hệ (3.72)-(3.73) có dạng

$$v_{\omega\omega} - \lambda^2 v = 0,\ 0 < \omega < \omega_0, \tag{3.74}$$

$$v(0) = v(\omega_0) = 0. \tag{3.75}$$

Tập phổ của các toán tử tuyến tính trong hệ này có các giá trị riêng đơn là $\lambda_k = \dfrac{ik\pi}{\omega_0}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ và các vectơ riêng tương ứng là $\varphi_k(\omega) = \sin\dfrac{k\pi\omega}{\omega_0}$. Ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $0 < \omega_0 < \pi$. Dải $0 \le Im\lambda \le 1$ không chứa giá trị riêng nào của

tập phổ của các toán tử tuyến tính trong hệ (3.74)-(3.75). Áp dụng Định lí 2.4, ta suy ra $u \in H_0^2(-\gamma, Q)$.

Trường hợp 2. $\pi < \omega_0 < 2\pi$. Khi đó, dải $0 \leq Im\lambda \leq 1$ có đúng một giá trị riêng $\lambda_1 = \dfrac{i\pi}{\omega_0}$ và giá trị riêng này không nằm trên các đường thẳng $Im\lambda = 0$, $Im\lambda = 1$. Sử dụng Định lí 3.1, nếu $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, \mathbb{R})$ với $0 \leq k \leq 3$ thì khi đó nghiệm $u(x,t)$ của bài toán (3.69)-(3.70) thỏa mãn biểu diễn sau

$$u(x,t) = c(t) r^{\pi/\omega_0} \sin \frac{\pi\omega}{\omega_0} + u_1(x,t), \tag{3.76}$$

trong đó $(u_1)_{t^k} \in H_0^{2,0}(-\gamma, Q)$ và $c_{t^k} \in L_2(-\gamma, \mathbb{R})$ với $k \leq 1$.

Kí hiệu

$$D_1 = \sin \frac{\pi\omega}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \frac{\pi\omega}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \omega}.$$

Thì $\dfrac{\omega_0}{\pi} r^{1-\pi/\omega_0} D_1 u = c(t) + c_1(x,t)$, trong đó $c_1(x,t) = \dfrac{\omega_0}{\pi} r^{1-\pi/\omega_0} D_1 u_1$.

Vì $u \in H^{1,0}(-\gamma, Q)$,

$$\begin{aligned} &\int_Q |c_1(x,t)|^2 e^{-2\gamma t} dxdt \leq C \int_Q r^{2(1-\pi/\omega_0)} |D_1 u|^2 e^{-2\gamma t} dxdt \\ &\leq C_1 \int_Q |Du|^2 e^{-2\gamma t} dxdt < \infty, \end{aligned} \tag{3.77}$$

trong đó C, C_1 là các hằng số dương.

Do kết quả về tính chính quy theo biến thời gian của nghiệm nên ta có thể kết luận $u_t \in H^{1,0}(-\gamma, Q)$, vì vậy

$$\begin{aligned} &\int_Q r^{2(-1+\pi/\omega_0)} |(c_1)_t|^2 e^{-2\gamma t} dxdt \leq C \int_Q |D_1 u_t|^2 e^{-2\gamma t} dxdt \\ &\leq C \int_Q |Du_t|^2 e^{-2\gamma t} dxdt < \infty. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Vì $u_1 \in H_0^{2,0}(-\gamma, Q)$ nên

$$\begin{aligned} &\int_Q r^{2(-1+\pi/\omega_0)} |Dc_1|^2 e^{-2\gamma t} dxdt \leq C \int_Q \left(r^{-1} D_1 u_1 + D D_1 u_1\right)^2 e^{-2\gamma t} dxdt \\ &\leq C \sum_{|\alpha|=1}^{2} \int_Q r^{2(|\alpha|-2)} |D^\alpha u_1|^2 e^{-2\gamma t} dxdt < \infty. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Do (3.77), (3.78) và (3.79), ta có

$$\sum_{|\alpha|+k=1}\int_Q r^{2(-1+\pi/\omega_0+k+|\alpha|-1)}|D^\alpha(c_1)_{t^k}|^2e^{-2\gamma t}dxdt+\int_Q|c_1|^2e^{-2\gamma t}dxdt<\infty.$$

Điều này dẫn đến $c_1\in V^1_{-1+\pi/\omega_0}(-\gamma,Q)$. Do Bổ đề 2 trong [37] nên tồn tại hàm $\hat{c}_1\in V^2_{\pi/\omega_0}(-\gamma,Q)$ sao cho

$$||\hat{c}_1||_{V^2_{\pi/\omega_0}(-\gamma,Q)}\le C||c_1||_{V^1_{-1+\pi/\omega_0}(-\gamma,Q)}+\int_Q r^{2(-2+\pi/\omega_0)}|c_1-\hat{c}_1|^2e^{-2\gamma t}dxdt<\infty, \tag{3.80}$$

trong đó $C>0$. Vì vậy từ (3.76) và (3.79), ta có

$$u(x,t)=\hat{c}_1(x,t)r^{\pi/\omega_0}\sin\frac{\pi\omega}{\omega_0}+u_2(x,t),$$

trong đó $u_2(x,t)=u_1(x,t)+r^{\pi/\omega_0}(c(x,t)-\hat{c}_1(x,t))\sin\dfrac{\pi\omega}{\omega_0}\in H^2_0(-\gamma,Q)$.
Tổng kết lại các kết quả trên, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.3. *Giả sử $f_{t^k}\in L_2(-\gamma,\mathbb{R})$ với $0\le k\le 3$ và u là một nghiệm của bài toán* (3.69)-(3.70) *với $n=2$. Ta có*

- *nếu $\omega_0<\pi$ thì $u\in H^2_0(-\gamma,Q)$*
- *nếu $\omega_0>\pi$ thì*

$$u(x,t)=c(x,t)r^{\pi/\omega_0}\sin\frac{\pi\omega}{\omega_0}+u_1(x,t),$$

trong đó $c\in V^2_{\pi/\omega_0}(-\gamma,Q)$ và $u_1\in H^2_0(-\gamma,Q)$.

Với $n=3$. Giả sử k_j là các giá trị riêng của các toán tử tuyến tính biên Dirichlet cho phương trình

$$-\Delta_\omega v+kv=0,\ \omega\in G,$$

trong đó $0<k_1\le k_2\le k_3\le\dots$ Khi đó

$$\lambda^*_j=i(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+k_j}),\ j=1,2,3,\dots$$
$$\lambda_j=i(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+k_j}),\ j=1,2,3,\dots$$

là các giá trị riêng của các toán tử tuyến tính ở hệ (3.72)-(3.73) với các vectơ riêng tương ứng là v_j^*, v_j. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Nếu $\mathrm{Im}\lambda_1 > \dfrac{1}{2}$ thì dải $-\dfrac{1}{2} \leq Im\lambda \leq \dfrac{1}{2}$ sẽ không chứa giá trị riêng nào của bài toán (3.72)-(3.73). Khi đó, áp dụng Định lí 2.4, ta suy ra $u \in H_0^2(-\gamma, Q)$.

Trường hợp 2. Nếu $\mathrm{Im}\lambda_1 \leq \dfrac{1}{2}$. Giả sử $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N_0}$ là các giá trị riêng của bài toán (3.72)-(3.73) thỏa mãn

$$-\frac{1}{2} < Im\lambda_1 < \cdots < Im\lambda_{N_0} \leq \frac{1}{2}.$$

(i) Nếu không có giá trị riêng nào của bài toán (3.72)-(3.73) nằm trên đường thẳng $Im\lambda = \dfrac{1}{2}$ thì sử dụng Định lí 3.1, ta có biểu diễn sau

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{N_0} c_j(t) r^{Im\lambda_j} \Phi_j(\omega, t) + u_o(x,t), \tag{3.81}$$

trong đó Φ_j là các hàm trơn theo ω, $c_j \in L_2(-\gamma, Q)$ với $j = 1, \ldots, N_0$ và $u_0 \in H_0^{2,0}(-\gamma, Q)$.

Xét miền

$$\Omega^\rho = \{x \in \Omega : \frac{1}{2}\rho < |x| < 2\rho\},$$

trong đó $\rho > 0$ đủ nhỏ sao cho biên của miền Ω^ρ trùng với nón K. Ta đặt $v(x', t) = u_0(\rho x', t)$. Do $u_0 \in H_0^{2,0}(-\gamma, Q)$ nên sử dụng các định lí nhúng cho miền $K' = \{x' \in K : \dfrac{1}{2} < |x'| < 2\}$ thì

$$|v(x',t)|^2 \leq C \int_{K'} \big(v^2 + |\mathrm{grad}\ v|^2 + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha v|^2\big) dx',$$

với C là hằng số. Thế $x = \rho x'$ vào bất đẳng thức này ta thu được

$$|u_0(x,t)|^2 \leq C \int_{\Omega^\rho} \big(\rho^{-3} u_0^2 + \rho^{-1} |\mathrm{grad}\ u_0|^2 + \rho \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_0|^2\big) dx.$$

Điều này dẫn đến

$$\rho^{-1}|u_0(x,t)|^2 \le C_1 \int_{\Omega^\rho} \big(r^{-4}u_0^2 + r^{-2}|\text{grad } u_0|^2 + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_0|^2\big)dx$$
$$\le C_2\|u_0\|^2_{H_0^2(\Omega)} \le C_3\|f\|^2_{L_2(\Omega)},$$

trong đó C_1, C_2, C_3 là các hằng số dương.
Với $|x| = \rho$ ta có $|u_0(x,t)| \le Cr^{\frac{1}{2}}$, trong đó C là một hằng số. Từ đây và từ đánh giá (3.81), ta được $|u(x,t)| \le Cr^{Im\lambda_1}$, $C = \text{const}$.

(ii) Nếu Im $\lambda_{N_0} = \dfrac{1}{2}$, chọn $\epsilon > 0$ sao cho

$$-\frac{1}{2} < Im\lambda_1 < \cdots < Im\lambda_{N_0} \le \frac{1}{2} + \epsilon.$$

Tương tự trường hợp (i) ta có $|u(x,t)| \le Cr^{Im\lambda_1}$, C là một hằng số.
Như vậy ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.4. *Lấy $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, \mathbb{R})$ với $0 \le k \le 3$ và u là một nghiệm suy rộng của bài toán* (3.69)-(3.70) *với $n = 3$. Khi đó*

$$|u(x,t)| \le Cr^{Im\lambda_1},\ C \text{ là hằng số.}$$

Với $n > 3$. Dải $1 - \dfrac{n}{2} \le Im\lambda(t) \le 2 - \dfrac{n}{2}$ không chứa giá trị riêng nào của bài toán (3.72)-(3.73) (xem trong [14], trang 289). Do đó, áp dụng Định lí 2.4 ta suy ra $u \in H_0^2(-\gamma, Q)$.

Mệnh đề 3.5. *Lấy $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, \mathbb{R})$ với $0 \le k \le 3$ và u là một nghiệm suy rộng của bài toán* (3.69)-(3.70) *với $n > 3$. Khi đó $u \in H_0^2(-\gamma, Q)$.*

3.5. Kết luận Chương 3

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu biểu diễn tiệm cận nghiệm trong lân cận của điểm nón. Các kết quả đạt được bao gồm:

- Công thức biểu diễn tiệm cận nghiệm trong lân cận của điểm nón (3.52). Các kết quả đã có về biểu diễn tiệm cận nghiệm trong lân cận của điểm nón đối với bài toán biên ban đầu cho hệ phương trình Schrödinger (xem trong [23], [26], [31]) cần yêu cầu các giá trị riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}$ là đơn hoặc bán đơn. Tuy nhiên ở đây chúng tôi vẫn có được công thức biểu diễn nghiệm tương tự mà chỉ yêu cầu các giá trị riêng này thỏa mãn điều kiện yếu hơn (điều kiện **(H)**).

- Xét bài toán biên Dirichlet cho phương trình Schrödinger cấp hai hai biến tổng quát trong miền góc. Từ đó, chúng tôi chỉ ra một ví dụ cụ thể mà ở đó các giá trị riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}$ phụ thuộc tường minh vào biến thời gian t. Và cuối cùng, như một trường hợp đặc biệt chúng tôi quay trở lại xét phương trình Schrödinger trong cơ học lượng tử.

- Trong trường hợp đặc biệt, khi xét bài toán biên cho phương trình Schrödinger trong cơ học lượng tử, kết quả thu được cho thấy, khi góc mở ω_0 càng nhỏ thì tính trơn của nghiệm càng tốt. Điều này trái với cảm nhận thông thường của chúng ta.

KẾT LUẬN

Luận án nghiên cứu về bài toán biên thứ nhất không có điều kiện ban đầu đối với hệ phương trình Schrödinger tổng quát trong miền không trơn. Các kết quả chính của luận án là:

1) Xây dựng được định nghĩa nghiệm suy rộng phù hợp, từ đó chứng minh được sự tồn tại duy nhất nghiệm trong không gian Sobolev $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ và thiết lập được ước lượng tiên nghiệm. Chú ý rằng, mặc dù không có điều kiện ban đầu, nhưng bằng cách xây dựng không gian nghiệm, không gian hàm thử và điều kiện phù hợp của ngoại lực f, chúng tôi vẫn nhận được kết quả về sự duy nhất nghiệm.

2) Chứng minh được tính chính quy theo biến thời gian t trong không gian $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ của nghiệm suy rộng chỉ phụ thuộc vào tính trơn theo biến thời gian của vế phải và các hệ số mà không phụ thuộc vào tính trơn của biên của miền đang xét. Bên cạnh đó, khi giả sử các hệ số của toán tử L là khả vi vô hạn trong Q thì chúng tôi cũng chứng minh được tính chính quy theo biến không gian và tính chính quy theo cả hai biến. Kết quả thu được cho thấy, trong khi tính chính quy theo biến không gian chỉ phụ thuộc vào tính trơn của vế phải của hệ đang xét thì tính chính quy theo cả hai biến phụ thuộc cả vào phổ của bài toán phổ tương ứng, tức là phụ thuộc vào độ trơn của biên của miền. Phương pháp được chúng tôi sử dụng đó là đánh giá độ trơn của nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu $t = h$, sau đó tiến qua giới hạn khi $h \to -\infty$ để đạt được tính trơn của nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu. Mặc dù đã

có các kết quả về tính trơn của nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu $t = 0$ nhưng chúng tôi không thể áp dụng các kết quả đã có bởi vì trong các kết quả đó, khi thời điểm ban đầu $t = h$ thay đổi thì các hằng số C trong các ước lượng tiên nghiệm cũng thay đổi theo. Do đó chúng tôi phải xây dựng lại các đánh giá để đảm bảo C độc lập với h để có thể qua giới hạn các ước lượng đó khi $h \to -\infty$.

3) Thiết lập được biểu diễn tiệm cận nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu cho hệ phương trình Schrödinger trong lân cận điểm kì dị của biên. Biểu diễn này cũng tương tự như biểu diễn tiệm cận nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu cho hệ Schrödinger mà ta đã biết trước đó, mặc dù chúng tôi chỉ yêu cầu điều kiện yếu hơn của phổ của bó toán tử $\mathfrak{U}$ (điều kiện $(\mathbf{H})$).

Các kĩ thuật và phương pháp được sử dụng trong luận án có thể áp dụng để nghiên cứu bài toán biên không có điều kiện ban đầu đối với các hệ không dừng tương tự.

KIẾN NGHỊ MỘT SỐ HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

Tiếp theo các kết quả của luận án tác giả thấy có một số vấn đề cần được tiếp tục nghiên cứu là:

- Nghiên cứu các bài toán không có giá trị ban đầu cho một số lớp phương trình, hệ phương trình vi phân tiến hóa khác, chẳng hạn phương hệ phương trình parabolic, hyperbolic.

- Nghiên cứu tính chính quy và biểu diễn tiệm cận của nghiệm suy rộng của bài toán trong các miền không trơn khác như miền có cạnh, miền có góc nhị diện,...

- Nghiên cứu bài toán trong các không gian Sobolev với chuẩn L_p với $1 \leq p \neq 2$.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH

1) N. M. Hung, N. T. Lien (2013), "On the solvability of the boundary value problem without initial condition for Schrödinger systems in infinite cylinders", *Boundary Value Problems*, Vol. 2013, Article ID 2013:156, pp. 1-9.

2) N. M. Hung, N. T. Lien (2014), "On the regularity of solutions of the boundary value problem without initial condition for Schrödinger systems in domain with conical points", *Boundary Value Problems*, Vol. 2014, Article ID 2014:181, pp. 1-12.

3) N. M. Hung, N. T. Lien (2016), "On the asymptotic formulas of solutions to the boundary value problem without initial condition for Schrödinger systems in domain with conical points", *Nonlinear Anal.*, Vol. 130, pp. 18-30.

Tài liệu tham khảo

[1] V. V. Hùng (2008), *Cơ học lượng tử*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm.

[2] R. A. Adams (1975), *Sobolev Spaces*, Academic Press, San Diego.

[3] N. T. Anh, N. M. Hung (2009), "Asymptotic formulas for solution of parameter-depending elliptic boundary-value problems in domains with conical points", *Electron. J. Differential Equations*, No. 15, pp. 1-21.

[4] T. M. Balabushenko, S. D. Ivasyshen (2002), "Properties of solutions to $2\overrightarrow{b}$-parabolic systems in domains unbounded with respect to time variable", *Mat. Metody Fiz.-Mech. Polya*, Vol. 45(4), pp. 19-26, (in Ukrainian).

[5] N. M. Bokalo (1990), "Problems without initial conditions for classes of nonlinear parabolic equations", *J. Sov. Math.*, Vol. 51(3), pp. 2291-2322.

[6] N. M. Bokalo (1994), "Energy estimates for solutions and unique solvability of the Fourier problem for linear and quasilinear parabolic equations", *Differential Equations*, Vol. 30(8), pp. 1226- 1234.

[7] N. M. Bokalo (1996), "On the well-posedness of the Fourier problem for a system of equations of nonstationary filtration type without conditions at infinity", *Math. Stud.*, Vol. 6, pp. 85-98.

[8] N. M. Bokalo (1996), "Boundary value problem for semilinear parabolic equations in unbounded domains without conditions at infinity", *Sib. Math. J.* , Vol. 37, pp. 860-867.

[9] N. M. Bokalo, V. M. Dmytriv (2000), "A Fourier problem for quasilinear parabolic equations of arbitrary order in noncylindric domains", *Math. Stud.*, Vol. 14(2), pp. 175-188.

[10] N. M. Bokalo, V. M. Dmytriv (2001), "The Fourier problem for a coupled diffusion system with functionals", *Ukrainian Math. J.*, Vol. 53(11), pp. 1784-1800.

[11] V. M. Dmytriv (2001), "On a Fourier problem for coupled evolution system of equations with time delays", *Mat. Stud.*, Vol. 16(2), pp. 141-156.

[12] N. M. Bokalo, V. M. Dmytriv (2002), "The Fourier problem for parabolic equations with a nonlocal boundary condition", *Mat. Met. Fiz. - Mekh. Polya*, Vol. 45(1), pp. 105-112.

[13] N. M. Bokalo, A. Lorenzi (2009), "Linear first - order evolution problems without initial conditions", *Milan J. Math.*, Vol. 77, pp. 437-494.

[14] N. M. Bokalo, V. M. Sikorsky (2008), "Problems without initial conditions for degenerate implicit evolution equations", *Electron. J. Differential Equations*, No. 04, pp. 1-16.

[15] O. M. Buhrii, S. P. Lavrenyuk (2001), "On a parabolic variational inequality that generalizes the equation of polytropic filtration", *Ukr. Math. J.*, Vol. 53(7), pp. 1027-1042.

[16] R. Dautray, J. L. Lions (1990), *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 1-3-5, Springer - Verlag, Berlin - New York.

[17] Yu. B. Dmytryshyn (2009), "A problem without initial conditions for linear and almost linear operator differential equation", *Ukr. Mat. Zh.*, Vol. 61(3), pp. 322-332.

[18] G. P. Domans'ka, M. O. Kolin'ko, S. P. Lavrenyuk (2006), "A problem without initial conditions for a pseudoparabolic equation in generalized Lebesgue spaces", *Mat. Stud.* , Vol. 25(1), pp. 73-86.

[19] G. Eskin (1992), "The wave equation in a wedge with general boundary conditions", *Comm. Partial Differential Equations*, 17(1-2), pp. 99-160.

[20] G. Fichera (1974), *Existence Theorems in Elasticity Theory*, Mir, Moscow, (in Russian).

[21] N. I. Guzil', S.P. Larvenyuk (2004), "A problem without initial conditions for a first-order hyperbolic system", *Mat. Met. Fiz. -Mekh. Polya*, Vol. 47(2), pp. 770-777.

[22] N. M. Hung (1998), "The first initial boundary value problem for Schrödinger systems in nonsmooth domains", *Differ. Uravn.*, Vol. 34 ,pp. 1546-1556. (in Russian).

[23] N. M. Hung, C. T. Anh (2004), "On the solvability of the first initial boundary value problem for Schrodinger systems in infinite cylinders" , *Vietnam J. Math.*, 32(1), pp. 41- 48.

[24] N. M. Hung, C. T. Anh (2005), "On the smoothness of solutions of the first initial boundary value problem for Schrodinger systems in domains with conical points", *Vietnam J. Math.*, 33(2), pp. 135 - 147.

[25] N. M. Hung, C. T. Anh (2006), "On the smoothness of solutions of the first initial boundary value problem for Schrodinger systems in infinite cylinders", *South. Asian Bull. Math.*, 30: 3 (2006), pp. 461 - 471.

[26] N. M. Hung, C. T. Anh (2009), "Asymptotic expansions of solutions of the first initial boundary value problem for the Schrödinger systems in domains with conical points II", *Ukrainian Math. J.*, Vol. 61(12), pp. 1640-1659.

[27] N. M. Hung, N. T. Anh (2013), "On initial boundary value problems for hyperbolic equations in domains with conical points", *Abstr. Appl. Anal.*, Vol. 2013 (2013), Article ID 801314, pp. 1-10.

[28] N. M. Hung, N. T. Lien (2013), "On the solvability of the boundary value problem without initial condition for Schrödinger systems in infinite cylinders", *Bound. Value Probl.*, Vol. 2013, Article ID 2013:156, pp. 1-9.

[29] N. M. Hung, N. T. K. Son (2008), "Existence and smoothness of solutions to second initial boundary value problems for Schrödinger systems in cylinders with non-smooth bases", *Electron. J. Differential Equations*, Vol. 2008(2008), No.35, pp. 1-14.

[30] N. M. Hung, N. T. K. Son (2009), "On the regularity of solution of the second initial boundary value problem for Schrödinger systems in domains with conical points", *Taiwan. J. Math.*, Vol. 13, No. 6B, December 2009, pp. 1885-1907.

[31] N. M. Hung, H. V. Long, N. T. K. Son (2013), "Second initial boundary value problem for strongly Schrödinger systems in cylinders with nonsmooth bases", *Appl. Math.*, 58:1 (2013), pp. 63-91

[32] S. D. Ivasyshen (1978), "Corect solvability of certain parabolic boundary value problems without initial conditions", *Differential Equations*, 14, pp. 254-255.

[33] S. D. Ivasyshen (1983), "Parabolic boundary-value problems without initial conditions", *Ukrainian Math. J.*, 34, pp. 73-84.

[34] T. Kato (1952), "On the pertubation theory of closed linear operators", *J. Math. Soc. Japan* , 4 (3-4), pp. 323-337.

[35] V. M. Kirilich, A. D. Myshkis (1992), "A boundary value problem without initial conditions for a linear one-dimensional system of hyperbolic type equations", *Differential Equations*, Vol. 28(3), pp. 393-399.

[36] M. O. Kolin'ko, S. P. Lavrenyuk (1996), "The Fourier problem for an evolution system with the second time derivative", *Mat. Stud.*, Vol. 6, pp. 73-84.

[37] V. G. Kondratiev (1997), "Singuarities of solutions of Dirichlet problem for second-order elliptic equations in a neighborhood of edges", *Differ. Equ.*, Vol. 13, pp. 2026-2032 (in Russian).

[38] V. A. Kondratiev, O. A. Oleinik (1967), "Boundary value problems for elliptic equations in domain with conic or corner points", *Tr. Mosk. Mat. Obs.* , Vol. 16 (1967), pp. 209-292.

[39] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann (1997), *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*, Vol. 52 of Mathematical surveys and monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, USA.

[40] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann (2001), *Spectral Problems Associated with Corner Singuarities of Solutions to Elliptic Equations*, Vol. 85 of Mathematical surveys and monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, USA.

[41] A. Yu. Kokotov, B. A. Plamenevskii (2005), "On asymptotics of solutions of the Neumann problem for hyperbolic systems in domains with conical points", *Algebra i Analiz*, No. 3(16), 56-98; English translation: *St.Petersburg Math. J.* , Vol. 16 (3), pp. 477-507.

[42] Z. Hu (2005), "Boundedness and Stepanov's almost periodicity of solutions", *Electron. J. Differential Equations*, No. 35, pp. 1-7.

[43] S. P. Lavrenyuk (1995), "A problem without initial conditions for an evolution system with a second time derivative", *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukraine*, No. 7, pp. 8-11.

[44] S. P. Lavrenyuk, M. O. Kolin'ko (1998), "The problem without initial data for linear Sobolev- Hal'pern system", *Demonstratio Math.*, Vol. 31(1), pp. 25-32.

[45] S. P. Lavrenyuk, N. Protsakh (2007), "A boundary value problem for nonlinear ultra-parabolic equation in a domain unbounded with respect to time variable", *Tatra Mt. Math. Pull.*, Vol. 38, pp. 131-146.

[46] S. P. Lavrenyuk, M. B. Ptashnik (2000), "A problem without initial conditions for a nonlinear pseudoparabolic system", *Diff. Equa.*, Vol. 36(5), pp. 739-748.

[47] S. P. Lavrenyuk, M. A. Oliskevich (2014), "A problem without initial conditions for a first order degenerate hyperbolic system", *Ukr. Math.*, Vol. 1(2), pp. 221-235.

[48] N. T. Lien, N. M. Hung (2014), "On the regularity of solutions of the boundary value problem without initial condition for Schrödinger systems in domain with conical points", *Bound. Value Probl.*, Vol. 2014, Article ID 2014:181, pp. 1-12.

[49] J. -L. Lions, F. Magenes (1972), *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Vol. 1. Springer, New York.

[50] J. -L. Lions, F. Magenes (1972), *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Vol. 2, Springer, New York.

[51] V. G. Maz'ya, B. A. Plamenevskii (1977), "On the coefficients in the asymptotic of solutions of the elliptic boundary problem in domains with

conical points", *Amer. Math. Soc. Trans.*, 123 (2), pp. 57-88. Translated from: *Math. Nachr.* , 76, pp. 29-60.

[52] E. I. Moiseev, G. O. Vafodorova (2002), "Problem without initial conditions for some differential equations", *Differ. Equa.*, Vol. 38(8), pp. 1162-1165.

[53] O. A. Oleinik, G. A. Iosifjan (2002), "Analog of Saint- Venant' principle and uniqueness of solutions of the boundary problems in unbounded domain for parabolic equations", *Usp. Mat. Nauk.*, Vol. 31(8), pp. 1162-1165.

[54] A. A. Pankov (1985), "Bounded and almost periodic solutions of nonlinear differential operator equations", *Kyjiv, Nauk. Dumka*, pp. 184.

[55] S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskii, *Elliptic Problems in Domains with Piecewise-Smooth Boundary*, Nauka, Moskva, 1990, (In Russian).

[56] P. Ya. Pukach (1994), "On a problem without initial conditions for a nonlinear degenerate parabolic systems", *Ukrainian Math. J.*, Vol. 46(4), pp. 484-487.

[57] M. Renardy, R. C. Rogers (2004), *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer.

[58] D. Safarov (1990), "On problems without initial conditions for nonclassical systems", *Differentsial'nye Uravneniya i Primenen.*, No. 45, pp. 484-487.

[59] I. I. Shmulev (1969), "Periodic and almost periodic solutions of problems with oblique derivative for parabolic equations", *Diff. Urav.* , Vol. 5(12), pp. 2225-2236, (in Russian).

[60] A. N. Tikhonov (1935), "Uniqueness theorems for the heat equation", *Mat. Sb.*, Vol. 42(2), pp. 199-216, (in Russian).

[61] G. O. Vafodorova (2000), "Problems without initial conditions for degenerate parabolic equation", *Differ. Equ.*, Vol. 36(12), pp. 1876-1878.

[62] G. O. Vafodorova(2003), "Problems without initial conditions for a nonclassical equation", *Differ. Equ.*, Vol. 39(2), pp. 304-306.