BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI**

* 

**NGUYỄN THỊ LIÊN**

# BÀI TOÁN BIÊN THỨ NHẤT KHÔNG CÓ ĐIỀU KIỆN BAN ĐẦU ĐỐI VỚI HỆ SCHRÖDINGER MẠNH TRONG MIỀN KHÔNG TRƠN

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 62 46 01 03

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2016

Luận án được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. Nguyễn Mạnh Hùng

Phản biện 1: GS. TSKH. Đinh Nho Hào, Viện Toán học.

Phản biện 2: PGS. TS. Trần Đình Kế, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

Phản biện 3: PGS. TS. Nguyễn Thiệu Huy, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội.

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường họp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội vào hồi .... giờ .... ngày .... tháng .... năm .....

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện: Thư viện Quốc Gia, Hà Nội hoặc Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

# Mở đầu

## LỊCH SỬ VẤN ĐỀ VÀ LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Các bài toán (giá trị) biên đối với một phương trình hay một hệ phương trình đạo hàm riêng thường có nguồn gốc từ các ngành khoa học tự nhiên và kĩ thuật, đặc biệt là các mô hình giải tích của nhiều hiện tượng vật lí. Bởi tính thực tiễn đó, khi nghiên cứu các bài toán biên, một cách tự nhiên người ta quan tâm đến sự tồn tại duy nhất nghiệm và các mô hình giải số của chúng. Các bài toán biên ban đầu trong miền trơn và không trơn đã được nghiên cứu trong rất nhiều các công trình. Khi đó, điều kiện ban đầu thường đóng vai trò then chốt trong sự tồn tại duy nhất nghiệm. Tuy nhiên, có nhiều tình huống trong thực tế dẫn đến việc nghiên cứu bài toán biên không có điều kiện ban đầu, ví dụ khi ta mô tả các quá trình không dừng trong tự nhiên, chẳng hạn khi dữ kiện ban đầu ở xa đến mức nó không tác động đến thời điểm hiện tại, và do đó ta có thể coi thời điểm ban đầu là $t = -\infty$. Bài toán biên không có điều kiện ban đầu được nghiên cứu khá sớm và thu hút được sự quan tâm của một số lượng nhất định các nhà toán học. Sau đây, chúng tôi sẽ giới thiệu một cách tóm tắt lịch sử vấn đề và một số phương pháp sử dụng để giải bài toán biên không có điều kiện ban đầu (xem thêm trong bài báo của N. M. Bokalo, A. Lorenzi (2009)).

Người đầu tiên nghiên cứu bài toán dạng này là nhà toán học người Nga N. A. Tikhonov. Năm 1935, trong bài báo của mình, tác giả đã xét phương trình truyền nhiệt với điều kiện biên Dirichlet như sau

$$\begin{aligned} &u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x),\ (t,x) \in S \times \Omega, \\ &u(t,x) = h(t,x),\ (t,x) \in S \times \partial\Omega, \end{aligned}$$

trong đó $\Omega$ là một miền trong $\mathbb{R}^n$ với biên trơn từng khúc $\partial\Omega$ và

$S = (-\infty, 0]$ hoặc $S = \mathbb{R}$ với $f, h$ là các hàm cho trước. Rõ ràng rằng, với $f = 0,\ h = 0$ và $\Omega = (0, \pi)$ hoặc $\Omega = (0, +\infty)$ thì các hàm

$$u_C(t, x) = Ce^{-t} \sin x,\ (t, x) \in S \times \Omega,$$

$C \in \mathbb{R}$ là hằng số tùy ý, đều là nghiệm cổ điển của bài toán trên. Do đó để đảm bảo được tính duy nhất nghiệm, ta cần đòi hỏi thêm một số điều kiện của nghiệm. Chú ý rằng, ở đây điều kiện ban đầu là không phù hợp, vì thời điểm ban đầu là $t = -\infty$. và chứng minh rằng khi $\Omega = (0, \pi)$, để có được tính duy nhất nghiệm của bài toán, tác giả chỉ cần yêu cầu nghiệm của bài toán bị chặn trong $S \times \Omega$. Để chứng minh điều này, Tikhonov sử dụng biểu diễn tích phân của nghiệm của bài toán biên ban đầu thứ nhất thông qua hàm Green tương ứng và chỉ ra rằng cần bổ sung điều kiện nghiệm bị chặn để đảm bảo tính duy nhất nghiệm của bài toán. Tương tự như vậy, nghiệm (duy nhất) bị chặn của bài toán không có điều kiện ban đầu cho phương trình truyền nhiệt với điều kiện biên Dirichlet với $f = 0$, thỏa mãn biểu diễn sau với mọi $(x, t) \in [0, +\infty) \times S$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\{\frac{-x^2}{4(t-\tau)}\} h(\tau) d\tau,$$

với giả thiết rằng hàm $h$ là liên tục và bị chặn trên $S$. Tikhonov đặt tên bài toán này là *bài toán Fourier* hay *bài toán không có điều kiện ban đầu* cho phương trình truyền nhiệt. Sau này, ý tưởng của A. N. Tikhonov được sử dụng trong các công trình các tác giả T. M. Balabushenko và S. D. Ivasyshen (2002), S. D. Ivasyshen (1983) để giải bài toán không có điều kiện ban đầu cho hệ parabolic tổng quát với các điều kiện biên khác với điều kiện biên Dirichlet. Công thức biểu diễn tích phân của nghiệm của các bài toán này và các định lí tồn tại duy nhất nghiệm được chứng minh trong các không gian Hölder địa phương, ở đó nghiệm bị chặn và không tăng.

Có một cách tiếp cận khác để giải bài toán không có điều kiện ban đầu cho một vài phương trình tiến hóa. Để đơn giản, ta xét phương trình truyền nhiệt khi $S = (-\infty, 0]$. Khi đó, sử dụng nguyên lí cực trị, ta có thể chứng minh tính duy nhất nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu cho phương trình truyền nhiệt với điều kiện biên Dirichlet như trên với điều kiện nghiệm $u(x,t)$ bị chặn đều trên $\Omega \times S$ và hội tụ đều tới 0 trên $\overline{\Omega}$ khi $t \to -\infty$. Còn sự tồn tại nghiệm được chứng minh bằng cách xây dựng dãy nghiệm xấp xỉ của bài toán có điều kiện ban đầu tương ứng. Cải tiến phương pháp này có thể sử dụng để giải quyết một số bài toán không có điều kiện ban đầu cho một số lớp phương trình tiến hóa, cụ thể là cho phương trình tựa tuyến tính và phương trình có trễ. Trong trường hợp này, có thể đòi hỏi thêm một số điều kiện về dáng điệu tiệm cận nghiệm khi $t \to \infty$ và tính bị chặn của nghiệm.

Khi xét nghiệm suy rộng của bài toán không có giá trị ban đầu, người ta có những cách tiếp cận khác nhau, phụ thuộc vào việc miền $\Omega$ là bị chặn hay không bị chặn. Trong trường hợp miền $\Omega$ bị chặn, ta thường cần đặt thêm các điều kiện để chắc chắn sự tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng. Chẳng hạn, khi xét bài toán biên Dirichlet cho phương trình truyền nhiệt ở trên, để đảm bảo sự duy nhất nghiệm thì ta cần đặt thêm điều kiện

$$e^{\lambda_1 t}|u(t,x)| \to 0 \text{ khi } t \to -\infty;$$

và để đảm bảo sự tồn tại nghiệm thì ta cần thêm điều kiện

$$\int_S e^{-2\omega t}||f||^2_{H^{-1}(\Omega)}dt < \infty,$$

trong đó $\omega > -\lambda_1$ và $\lambda_1$ là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta$ với điều kiện biên Dirichlet. Ngoài ra, các kết quả cho các lớp phương trình khác trong trường hợp miền $\Omega$ bị chặn có thể tìm

thấy trong các tài liệu N. M. Bokalo (1994), V. M. Dmytriv (2000), Yu. B. Dmytryshyn (2009), G. P. Domans'ka, M. O. Kolin'ko, S. P. Lavrenyuk (2006), Z. Hu (2005), A. A. Pankov (1985), P. Ya. Pukach (1994),...

Khi nghiên cứu bài toán trong trường hợp miền không bị chặn, kết quả về bài toán biên không có điều kiện ban đầu cho một số lớp phương trình tiến hóa có thể xem trong công trình của S. P. Lavrenyuk, N. Protsakh (2007) Chúng tôi cũng trích dẫn thêm rằng, các bài toán không có điều kiện ban đầu cho các phương trình tiến hóa liên quan đến đạo hàm cấp hai theo biến thời gian, hệ Sobolev-Hal'pern tuyến tính, các phương trình kiểu hyperbolic được nghiên cứu trong các công trình của V. M. Kirilich, A. D. Myshkis (1992), S. P. Lavrenyuk, M. O. Kolin'ko (1998), S. P. Lavrenyuk, N. Protsakh (2007), S. P. Lavrenyuk, M. A. Oliskevich (2014), D. Safarov (1990), G. O. Vafodorova (2000, 2003), ...

Tóm lại, chúng ta có thể thấy, có rất nhiều công trình nghiên cứu về bài toán không có điều kiện ban đầu. Các kết quả đạt được chủ yếu xoay quanh sự tồn tại duy nhất nghiệm và miền chứa biến không gian $\Omega$, dù bị chặn hay không bị chặn, đều là miền với biên trơn từng khúc. Như vậy, bên cạnh những kết quả đã đạt được khi nghiên cứu bài toán không có điều kiện ban đầu, vẫn còn rất nhiều vấn đề mở, trong đó các vấn đề mở chúng tôi quan tâm đó là:

• Các tính chất khác của nghiệm suy rộng, chẳng hạn tính trơn theo các biến của nghiệm bài toán không có điều kiện ban đầu.

• Bài toán không có điều kiện ban đầu cho các lớp phương trình tiến hóa khác.

• Xét bài toán khi miền $\Omega$ chứa các điểm kì dị.

Trên thực tế, rất nhiều các bài toán ứng dụng quan trọng được đưa về việc nghiên cứu các bài toán biên đối với phương trình,

hệ phương trình đạo hàm riêng trong miền có biên không trơn. Bài toán biên elliptic tổng quát trong các miền chứa hữu hạn các điểm góc hay điểm nón đã được nghiên cứu khá hoàn thiện trong các công trình của V. A. Kondratiev, O. A. Oleinik (1967); V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann (1997) và các tác giả khác. Trong đó, các tác giả đã nhận được kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm, tính trơn của nghiệm và biểu diễn tiệm cận nghiệm trong lân cận của các điểm kì dị của biên. Bên cạnh đó, bài toán biên đối với các phương trình, hệ phương trình không dừng trong miền với biên không trơn cũng nhận được sự quan tâm của nhiều nhà toán học, chẳng hạn như trong các công trình của G. Eskin (1992), A. Yu. Kokotov và B. A. Plamenevskii (2005),...

Trong các hệ không dừng, hệ phương trình Schrödinger có vai trò quan trọng nhất định vì có những ứng dụng thực tiễn trong cơ học lượng tử. Các bài toán biên đối với hệ phương trình loại này được đưa ra và phân tích đầu tiên bởi J. L. Lions và E. Magenes (1968). Trong các công trình đó, các tác giả đã nghiên cứu các bài toán biên đối với phương trình Schrödinger mà các hệ số của nó độc lập với biến thời gian và nhận được kết quả trong hình trụ hữu hạn $\Omega \times [0, T]$, $T < +\infty$. Năm 1998, N. M. Hung đã phát triển bài toán này cho hệ phương trình với hệ số phụ thuộc thời gian. Bằng cách sử dụng phương pháp cắt thiết diện, chuyển bài toán đang xét về bài toán elliptic phụ thuộc tham số trong miền chứa điểm nón, tác giả cũng nhận được các kết quả tương ứng trong trụ hữu hạn. Bài toán biên ban đầu thứ nhất cho hệ phương trình loại này trong trụ vô hạn $Q = \Omega \times [0, \infty)$ được N. M. Hung và C. T. Anh (2004) nghiên cứu. Bằng phương pháp xấp xỉ Galerkin, các tác giả đã đạt được kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng và tính trơn của nghiệm theo biến thời gian. Kết quả về tính trơn theo biến không gian và biểu diễn tiệm cận nghiệm có thể đạt được bằng phương pháp cắt thiết diện đã nêu ở trên. Trong

công thức biểu diễn tiệm cận nghiệm, với một số giả thiết về sự phân bố các giá trị riêng của bài toán phổ tương ứng, nghiệm suy rộng sẽ được phân tích thành tổng hai phần chính trong một lân cận đủ nhỏ của điểm nón. Phần thứ nhất đặc trưng cho tính kì dị của bài toán, còn phần thứ hai có tính trơn theo biến không gian theo tính trơn của vế phải. Tiếp theo đó, các tác giả N. M. Hung và N. T. K. Son (2008) đã nghiên cứu bài toán biên ban đầu thứ hai đối với hệ Schrödinger trong miền có điểm nón. Trong các công trình đó, các tác giả cũng nhận được các kết quả tương tự như khi xét bài toán biên ban đầu thứ nhất.

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu bài toán biên thứ nhất không có giá trị ban đầu cho hệ phương trình Schrödinger trong miền có điểm nón. Không chỉ xây dựng không gian nghiệm phù hợp để đảm bảo sự tồn tại duy nhất nghiệm, chúng tôi còn thiết lập các kết quả về tính chính quy của nghiệm và xây dựng công thức biểu diễn tiệm cận của nghiệm trong lân cận của điểm kì dị. Chú ý rằng, nếu miền đáy chứa hữu hạn điểm nón thì bằng cách sử dụng phân hoạch đơn vị, chúng tôi có thể chuyển về xét bài toán trong trường hợp đáy chứa một điểm nón. Vì vậy, trong cả luận án này, không mất tính tổng quát, chúng tôi chỉ nghiên cứu bài toán khi đáy của hình trụ đang xét chỉ chứa một điểm nón trùng với gốc tọa độ.

## MỤC ĐÍCH, ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

• Mục đích luận án: Góp phần hoàn thiện việc nghiên cứu tính giải được duy nhất, tính trơn của nghiệm cũng như dáng điệu tiệm cận nghiệm trong lân cận điểm nón của bài toán không có điều kiện ban đầu trong miền có chứa điểm kì dị.

• Đối tượng nghiên cứu: Bài toán biên thứ nhất không có điều kiện ban đầu đối với hệ phương trình Schrödinger trong miền chứa điểm nón.

• Phạm vi nghiên cứu:

– **Nội dung 1:** Sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán.

– **Nội dung 2:** Tính trơn của nghiệm của bài toán.

– **Nội dung 3:** Biểu diễn tiệm cận nghiệm trong lân cận của điểm nón.

## PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

- Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu, chúng tôi xây dựng dãy nghiệm xấp xỉ của bài toán có điều kiện ban đầu $t = h$ tương ứng và chuyển qua giới hạn khi thời điểm ban đầu dần tới $-\infty$.

- Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu, chúng tôi sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin.

- Để chứng minh sự duy nhất nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu, phương pháp được chúng tôi lựa chọn là phương pháp chọn hàm thử của Ladyzenskaya. Mặc dù không có điều kiện ban đầu nhưng chúng tôi vẫn đạt được kết quả về sự duy nhất nghiệm do chúng tôi đã sử dụng một bổ đề tương tự như Bổ đề Gronwall trong khoảng vô hạn và đặt thêm một số giả thiết phù hợp về vế phải và các hệ số của toán tử $L$.

- Để chứng minh tính trơn của nghiệm, chúng tôi nghiên cứu tính trơn của các bài toán có điều kiện ban đầu tương ứng, sau đó bằng cách tiến qua giới hạn khi cho thời điểm ban đầu tiến tới $-\infty$, ta được tính trơn của nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu.

- Để thu được biểu diễn tiệm cận nghiệm trong lân cận của điểm nón, chúng tôi sử dụng phương pháp cắt thiết diện, chuyển bài toán không dừng về bài toán elliptic chứa tham

số trong miền có điểm nón và sử dụng các kết quả về bài toán elliptic.

## CẤU TRÚC VÀ CÁC KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN

Luận án, ngoài phần Lời cam đoan, Lời cảm ơn, Một số kí hiệu thường dùng, Các không gian hàm, Mở đầu, Kết luận, Kiến nghị một số hướng nghiên cứu tiếp theo, Danh mục các công trình và Tài liệu tham khảo, gồm 3 chương:

• Chương 1: Tính giải được duy nhất của bài toán.

• Chương 2: Tính trơn của nghiệm.

• Chương 3: Biểu diễn tiệm cận nghiệm trong lân cận của điểm nón.

Các kết quả của luận án là mới, có ý nghĩa khoa học, góp phần hoàn thiện lí thuyết bài toán biên không có điều kiện ban đầu và bài toán biên không dừng trong miền không trơn. Lược đồ nghiên cứu của luận án có thể áp dụng để nghiên cứu các bài toán biên không có điều kiện ban đầu không dừng tương tự. Nội dung chính của luận án đã được công bố trong 03 bài báo khoa học trên các tạp chí quốc tế trong danh mục ISI và được liệt kê ở mục **Danh mục công trình** và được báo cáo tại:

• Hội nghị khoa học khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội các năm 2013, 2016.

• Hội nghị khoa học khoa Công nghệ thông tin, Học viện Quản lí Giáo dục, 2013.

• Seminar của Bộ môn Giải tích, khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

# Chương 1
# TÍNH GIẢI ĐƯỢC DUY NHẤT CỦA BÀI TOÁN

Mục đích của chương này là giới thiệu bài toán và nghiên cứu tính giải được duy nhất của bài toán. Tính duy nhất nghiệm được chứng minh bằng phương pháp chọn hàm thử của Ladyzenskaya, còn sự tồn tại nghiệm được chứng minh bằng cách xấp xỉ nghiệm bởi một dãy các nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu tương ứng. Mặc dù đã có các kết quả nghiên cứu về sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán biên ban đầu đối với hệ phương trình Schrödinger nhưng ở đây chúng tôi không áp dụng trực tiếp được các kết quả đó mà phải xây dựng lại các ước lượng tiên nghiệm để có thể tiến qua giới hạn dãy nghiệm xấp xỉ. Kết quả chính của chương này là Định lí 1.2. Các kết quả của chương này không chỉ đúng khi miền đáy $\Omega$ chứa điểm nón mà còn đúng cho miền tùy ý. Nội dung chính của chương này được viết dựa trên phần đầu các bài báo số 1, 2, 3 trong danh mục công trình của tác giả.

## 1.1. Phát biểu bài toán

Xét toán tử vi phân cấp $2m$ sau đây

$$L(x,t,D) = \sum_{|p|,|q|=0}^{m} (-1)^{|p|} D^p\big(a_{pq}(x,t)D^q\big),$$

trong đó $a_{pq}$ là các ma trận cỡ $s \times s$ với các phần tử là các hàm đo được, bị chặn trong $\overline{Q}$ và thỏa mãn $a_{pq} = a_{qp}^*$ với $|p| = |q| = m$ (trong đó $a_{qp}^*$ là ma trận liên hợp phức chuyển vị của ma trận $a_{pq}$). Hơn nữa, giả sử tồn tại hằng số dương $a_0$ sao cho với mọi $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\eta \in \mathbb{C}^s \setminus \{0\}$ và $(x,t) \in Q$, ta có

$$\sum_{|p|=|q|=m} a_{pq}(x,t)\xi^p\xi^q\eta\overline{\eta} \geq a_0|\xi|^{2m}|\eta|^2,$$

trong đó $\xi^p = \xi_1^{p_1}...\xi_n^{p_n}$, $\xi^q = \xi_1^{q_1}...\xi_n^{q_n}$.

Trong cả luận án này, chúng tôi bài toán sau trong hình trụ $Q$

$$(-1)^{m-1}iL(x,t,D)u - u_t = f(x,t) \text{ trong } Q, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \mid_{\Gamma} = 0, \quad j = 0, \ldots, m-1, \tag{1.2}$$

trong đó $\nu$ là pháp vectơ ngoài đơn vị với mặt xung quanh $\Gamma$.

## 1.2. Sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu

Trước tiên, với mỗi $h \in \mathbb{R}$ trong hình trụ $\Omega_h^\infty$ ta nghiên cứu bài toán có điều kiện ban đầu sau

$$(-1)^{m-1}iL(x,t,D)v - v_t = f(x,t) \text{ trong } \Omega_h^\infty, \tag{1.3}$$

$$v \mid_{t=h} = 0,\ x \in \Omega, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^j v}{\partial \nu^j} \mid_{S_h^\infty} = 0, \quad j = 0, \ldots, m-1, \tag{1.5}$$

trong đó $\nu$ là pháp vectơ ngoài đơn vị với mặt xung quanh $S_h^\infty$. Kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán (1.3)-(1.5) có thể phát biểu như sau.

**Định lí 1.1.** *Giả sử*

*i)* $\sup\left\{ \left|\frac{\partial a_{pq}}{\partial t}\right| : (x,t) \in \Omega_h^\infty,\ 0 \le |p|, |q| \le m \right\} = \mu < \infty$

*ii)* $f_t, f \in L_2(-\gamma, \Omega_h^\infty)$.

*Khi đó với mọi* $\gamma > \gamma_0 = \dfrac{m^\star \mu}{2\mu_0}$, $m^\star$ *là số các bộ đa chỉ số có cấp không vượt quá* $m$, *tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng* $v$ *thuộc không gian* $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, \Omega_h^\infty)$ *của bài toán* (1.3)-(1.5) *và nghiệm đó thỏa mãn ước lượng tiên nghiệm sau:*

$$\|v\|^2_{H^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \le C\left[\|f\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)} + \|f_t\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)}\right], \tag{1.6}$$

*ở đó* $C$ *là hằng số dương không phụ thuộc vào* $h, v$ *và* $f$.

## 1.3. Sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu

Trong mục này, chúng tôi phát biểu và chứng minh kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán (1.1)-(1.2). Kết quả chính đạt được là định lí sau.

**Định lí 1.2.** *Giả sử rằng* $\gamma > \gamma_0 = \dfrac{m^\star \mu}{2\mu_0}$ *với* $m^\star$ *là số các bộ đa chỉ số có cấp không vượt quá* $m$*. Hơn nữa, giả sử rằng tồn tại hằng số dương* $\mu$ *sao cho*

*i)* $\sup\left\{|\dfrac{\partial a_{pq}}{\partial t}| : (x,t) \in Q,\ 0 \le |p|, |q| \le m\right\} = \mu < \infty;$

*ii)* $|\dfrac{\partial a_{pq}}{\partial t}| = o(e^{2\gamma t})$ *khi* $t \to -\infty$ *với mọi* $|p|, |q| \le m$ *và với mọi* $x \in \Omega$;

*iii)* $f, f_t \in L_2(-\gamma, Q)$.

*Khi đó, tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng* $u(x,t) \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ *của bài toán* (1.1)-(1.2) *thỏa mãn ước lượng tiên nghiệm sau*

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma,Q)} \le C\left[\|f\|^2_{L_2(-\gamma,Q)} + \|f_t\|^2_{L_2(-\gamma,Q)}\right].$$

# Chương 2
# TÍNH CHÍNH QUY CỦA NGHIỆM

Mục đích của chương này là chỉ ra các kết quả về tính trơn theo biến thời gian và tính trơn theo cả hai biến thời gian - không gian của nghiệm của bài toán (1.1)-(1.2). Trước tiên, ta sẽ chỉ ra các kết quả về tính trơn của bài toán có điều kiện ban đầu tương ứng (1.3)-(1.5). Sau đó, dựa trên việc các hằng số $C$ trong các ước lượng nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu $t = h$ đều không phụ thuộc vào $h$, ta có thể tiến qua giới hạn và thu được các kết quả về tính trơn của bài toán (1.1)-(1.2). Lưu ý rằng ở đây, ta không thể áp dụng các kết quả đã có về tính trơn của nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu đối với hệ phương trình Schrödinger mạnh trong miền có điểm nón. Vì trong các kết quả đã có, hằng số $C$ trong các đánh giá của nghiệm thay đổi khi điều kiện ban đầu thay đổi. Các kết quả chính của chương này là Định lí 2.3 và Định lí 2.4. Nội dung chính của chương này được viết dựa trên bài báo số 2 trong danh mục công trình của tác giả.

## 2.1. Tính trơn của nghiệm theo biến thời gian của bài toán có điều kiện ban đầu

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta có thể chứng minh kết quả về tính trơn của nghiệm của bài toán (1.3)-(1.5) như sau.

**Định lí 2.1.** *Giả sử rằng $l \in \mathbb{N}$ và tồn tại $\mu > 0$, $\mu_2 > 0$ sao cho*

*i)* $\sup\left\{|\dfrac{\partial a_{pq}}{\partial t}| : (x,t) \in Q,\ 0 \le |p|, |q| \le m\right\} = \mu < \infty;$
$|\dfrac{\partial^k a_{pq}}{\partial t^k}| \le \mu_2$ *với* $2 \le k \le l+1$;

*ii)* $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, \Omega_h^\infty)$ *với* $0 \le k \le l+1$, $f_{t^k}(x,h) = 0$ *với mọi* $x \in \Omega$ *và* $0 \le k \le l$.

*Khi đó với mọi* $\gamma > (2l+1)\gamma_0$, *nghiệm* $v \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ *của bài toán* (1.3)-(1.5) *có các đạo hàm theo biến* $t$ *tới cấp* $l$ *thỏa mãn* $v_{t^k} \in H^{m,0}(-\gamma, \Omega_h^\infty)$, *với mọi* $k = 0, \ldots, l$ *và thỏa mãn ước lượng*

$$\|v_{t^k}\|^2_{H^{m,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \leq C \sum_{j=0}^{k+1} \|f_{t^j}\|^2_{L_2(-\gamma,\Omega_h^\infty)}, \tag{2.1}$$

*trong đó hằng số* $C$ *không phụ thuộc vào* $v, f, h$.

## 2.2. Tính trơn theo tập hợp các biến của nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu

Giả sử $\omega$ là hệ tọa độ cực trên $S^{n-1}$. Hơn nữa, giả sử phần chính của toán tử $L(x,t,D)$ tại gốc tọa độ 0 có thể viết ở dạng sau

$$\mathcal{L}(0,t,D) = r^{-2m}\mathfrak{L}(\omega, t, rD_r, D_\omega),\ D_r = \frac{i\partial}{\partial r},$$

trong đó $\mathfrak{L}$ là toán tử tuyến tính với các hệ số trơn. Khi đó bài toán phổ sau đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu tính trơn của nghiệm.

$$\mathfrak{L}(\omega, t, \lambda, D_\omega)v(\omega) = 0,\ \omega \in G, \tag{2.2}$$

$$D_\omega^j v(\omega) = 0,\ \omega \in \partial G,\ j = 0, \ldots, m-1. \tag{2.3}$$

**Định lí 2.2.** *Lấy* $l$ *là một số nguyên không âm. Giả sử rằng* $v(x,t)$ *là một nghiệm yếu trong không gian* $H^{m,0}(-\gamma, \Omega_h^\infty)$ *của bài toán* (1.3)-(1.5) *trong đó* $\gamma > (2(2m+l)+1)\gamma_0$ *và* $f_{t^k} \in H_0^{l,0}(-\gamma, \Omega_h^\infty)$ *với* $k \leq 2m+l+1$, $f_{t^k}(x,h) = 0$ *với* $k \leq 2m+l$. *Hơn nữa, giả thiết rằng trong dải*

$$m - \frac{n}{2} \leq Im\lambda \leq 2m + l - \frac{n}{2}$$

*không chứa điểm phổ của bài toán* (2.2)-(2.3).

*Khi đó* $v \in H_0^{2m+l}(-\gamma, \Omega_h^\infty)$ *và thỏa mãn ước lượng sau*

$$\|v\|^2_{H_0^{2m+l}(-\gamma,\Omega_h^\infty)} \leq C \sum_{k=0}^{2m+l+1} \|f_{t^k}\|^2_{H_0^{l,0}(-\gamma,\Omega_h^\infty)}, \tag{2.4}$$

*trong đó hằng số* $C$ *không phụ thuộc vào* $h$.

## 2.3. Tính trơn nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu

Bằng cách sử dụng tính chất của dãy nghiệm xấp xỉ và các kết quả về tính trơn của nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu tương ứng, ta thu được các kết quả về tính trơn của nghiệm của bài toán (1.1)-(1.2) như sau.

**Định lí 2.3.** *Giả sử* $l \in \mathbb{N}$ *và tồn tại* $\mu > 0$, $\mu_2 > 0$ *sao cho*

*i)* $\sup\left\{|\dfrac{\partial a_{pq}}{\partial t}| : (x,t) \in Q,\ 0 \leq |p|, |q| \leq m\right\} = \mu < \infty,$

$|\dfrac{\partial^k a_{pq}}{\partial t^k}| \leq \mu_2,$ *với* $2 \leq k \leq l+1$;

*ii)* $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, Q),$ *với mọi* $x \in \Omega$, $0 \leq k \leq l+1$.

*Khi đó với mọi* $\gamma > (2l+1)\gamma_0$, *nghiệm* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ *của bài toán* (1.1)-(1.2) *có đạo hàm theo biến* $t$ *tới cấp* $l$ *và thỏa mãn* $u_{t^k} \in H^{m,0}(-\gamma, Q)$, *với mọi* $k = 0, \ldots, l$ *sao cho*

$$\|u_{t^k}\|^2_{H^{m,0}(-\gamma,Q)} \leq C \sum_{j=0}^{k+1} \|f_{t^j}\|^2_{L_2(-\gamma,Q)}, \tag{2.5}$$

*trong đó hằng số* $C$ *không phụ thuộc vào* $u, f$.

**Định lí 2.4.** *Lấy* $l$ *là một số nguyên không âm và số thực* $\gamma$ *thỏa mãn* $\gamma > (2(2m+l)+1)\gamma_0$. *Giả sử rằng* $u(x,t)$ *là nghiệm suy rộng trong không gian* $H^{m,0}(-\gamma, Q)$ *của bài toán* (1.1)-(1.2) *và* $f_{t^k} \in H_0^{l,0}(-\gamma, Q)$, *với* $k \leq 2m+l+1$. *Hơn nữa, giả sử rằng trong dải*

$$m - \frac{n}{2} \leq Im\lambda \leq 2m + l - \frac{n}{2}$$

*không chứa điểm phổ của bài toán* (1.1)-(1.2). *Khi đó* $u \in H_0^{2m+l}(-\gamma, Q)$ *và thỏa mãn ước lượng sau*

$$\|u\|^2_{H_0^{2m+l}(-\gamma,Q)} \leq C \sum_{k=0}^{2m+l+1} \|f_{t^k}\|^2_{H_0^{l,0}(-\gamma,Q)}. \tag{2.6}$$

# Chương 3
# BIỂU DIỄN TIỆM CẬN NGHIỆM TRONG LÂN CẬN ĐIỂM NÓN

Mục đích chính của chương này là nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm suy rộng trong lân cận của điểm nón. Kết quả chính của chương là Định lý 3.1. Phương pháp chính để nghiên cứu là sử dụng các kết quả về phổ của các toán tử tuyến tính và các kết quả về biểu diễn tiệm cận nghiệm của bài toán elliptic trong lân cận của điểm nón cùng với phương pháp chứng minh quy nạp toán học. Nội dung chính của chương này được viết theo bài báo số 3 trong danh mục các công trình của tác giả.

## 3.1. Các kiến thức bổ trợ

Trong mục này, chúng tôi trình bày lại các kiến thức liên quan và xây dựng bó toán tử

$$\mathfrak{U}(\lambda, t) = (\mathfrak{L}(\omega, t, \lambda, D_\omega), D_\omega^0, \ldots, D_\omega^{m-1}),\ \lambda \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R},$$

của bài toán elliptic phụ thuộc tham số sau

$$\mathfrak{L}(\omega, t, \lambda, D_\omega)u = f, \text{ trong } G, \tag{3.1}$$

$$D_\omega^j u = g_j, \text{ trên } \partial G,\ j = 0, \ldots, m-1. \tag{3.2}$$

Để thu được biểu diễn tiệm cận nghiệm, sau này ta còn đòi hỏi thêm các điều kiện về các giá trị riêng và vectơ riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}(\lambda, t)$ như sau.

Lấy $l_1, l_2$ là các số nguyên không âm và $\beta_1, \beta_2$ là các số thực sao cho $l_1 - \beta_1 < l_2 - \beta_2$. Ta nói rằng giả thiết (**H**) cho các số $l_1, l_2, \beta_1, \beta_2$ được thỏa mãn nếu các điều kiện sau được thỏa mãn.

i. Các đường thẳng $Im\lambda = -\beta_i + l_i - n/2$, $(i = 1, 2)$ không chứa các giá trị riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}(\lambda, t)$, và dải $-\beta_1 +$

$l_1 - n/2 < Im\lambda < -\beta_2 + l_2 - n/2$ chỉ chứa các hàm giá trị riêng $\lambda_\mu(t)$, $\mu = 1, \ldots, N$, với bội hình học tương ứng là $\Lambda_\mu$ $\kappa_{\mu,k}$, $\mu = 1, \ldots, N$, $k = 1, .., \Lambda_\mu$, không phụ thuộc vào $t \in \mathbb{R}$. Hơn nữa các hàm giá trị riêng là các hàm giải tích trong $\mathbb{R}$.

ii. Ta có thể chọn được một hệ trực chuẩn các vectơ $\varphi_{k,s}^{(\mu)}(\omega, t)$ với $k = 1, \ldots, \Lambda_\mu$, $s = 1, \ldots, \kappa_{\mu,k}$, của xích Jordan của $\mathfrak{U}(\lambda, \mathfrak{t})$ tương ứng với giá trị riêng $\lambda_\mu(t)$, $\mu = 1, \ldots, N$ sao cho các vectơ $\varphi_{k,s}^{(\mu)}(\omega, t)$, $k = 1, \ldots, \Lambda_\mu$, $s = 1, \ldots, \kappa_{\mu,k}$ là các hàm trơn trong $\mathbb{R}$ với mọi $\omega \in \overline{G}$.

## 3.2. Biểu diễn tiệm cận của bài toán elliptic phụ thuộc tham số

Mục này trình bày một số kết quả về biểu diễn tiệm cận nghiệm của bài toán elliptic phụ thuộc tham số.

Đầu tiên, trong nón $K$ ta xét bài toán biên elliptic phụ thuộc vào tham số $t$ như sau

$$(-1)^m \mathcal{L}(t, D)u = f \text{ trong } K_\infty, \tag{3.3}$$

$$D_\omega^j u = g_j \text{ trên } \partial K_\infty,\ j = 0, \ldots, m-1. \tag{3.4}$$

Bổ đề sau mô tả biểu diễn tiệm cận của nghiệm của bài toán elliptic phụ thuộc một tham số:

**Bổ đề 3.1.** *Lấy $u \in V_{\beta_1,d}^{l_1,0}(-\gamma, K_\infty)$ là một nghiệm của bài toán sau*

$$(-1)^m L(t, D)u = f \text{ trong } K_\infty, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = g_j \text{ trên } \partial K_\infty,\ j = 0, \ldots, m-1, \tag{3.6}$$

*trong đó $f \in V_{\beta_2,d}^{l_2-2m,0}(-\gamma, K_\infty)$, $g_j \in V_{\beta_2,d}^{l_2-2m+j+1/2,0}(-\gamma, \partial K_\infty)$ với $j = 1, \ldots, m$ và $l_1$, $l_2, d$ là các số nguyên không âm thỏa mãn $l_2 \geq l_1 \geq 2m$, $\beta_1$, $\beta_2$ là các số thực thỏa mãn $l_1 - \beta_1 < l_2 - \beta_2$. Hơn nữa, giả sử rằng giả thiết (**H**) đúng cho $l_1$, $l_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ với $N = 1$*

*(tức là trong dải* $-\beta_1 + l_1 - \dfrac{n}{2} < Im\lambda < -\beta_2 + l_2 - \dfrac{n}{2}$ *chỉ có một giá trị riêng* $\lambda_0(t)$ *giải tích trên* $\mathbb{R}$ *với bội hình học* $\Lambda$ *và các bội riêng* $\kappa_k$, $k = 1, \ldots, \Lambda$, *không phụ thuộc vào* $t \in \mathbb{R}$*). Khi đó, nghiệm* $u$ *có dạng*

$$u(x,t) = \sum_{s=0}^{\kappa-1} r^{-i\lambda_0(t)+s} P_s(\ln r) + w(x,t), \tag{3.7}$$

*trong đó* $w(\cdot,\cdot) \in V^{l_2,0}_{\beta_2,d}(-\gamma, K_\infty)$, $P_s(\cdot)$ *là các đa thức có bậc không vượt quá* $\theta + \kappa - 1$, *với các hệ số là các hàm trong không gian* $C^{\infty,d}(-\gamma, G_\infty)$, $\kappa$ *là số nguyên bé nhất lớn hơn* $-\beta_2 + l_2 - \dfrac{n}{2} - Im\lambda_0(t)$ *với mọi* $t \in \mathbb{R}$, *và* $\theta$ *là bội riêng lớn nhất của* $\lambda_0(t)$.

## 3.3. Biểu diễn tiệm cận nghiệm của bài toán biên không có điều kiện ban đầu đối với hệ Schrödinger trong lân cận điểm nón

Kết quả chính của chương này có thể phát biểu như sau:

**Định lí 3.1.** *Giả sử* $d, l$ *là các số nguyên không âm,* $\beta, \beta'$ *là các số thực thỏa mãn* $0 \le \beta' < \beta$ *và* $\beta \ge m$. *Giả thiết rằng* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ *là một nghiệm suy rộng của bài toán (1.1)-(1.2) với* $\gamma > (2(d+l)+1)\gamma_0$; $f_{t^k} \in H^{l,0}_0(-\gamma, Q)$, *với* $k \le d + 2l + 2$ *và giả thiết (**H**) cho các số* $l_1 = 2m$, $l_2 = 2m + l$, $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = \beta'$ *được thỏa mãn. Hơn nữa giả sử rằng tồn tại* $T > 0$ *các điều kiện sau được thỏa mãn:*

**i.** $Im\lambda_1(t) < \cdots < Im\lambda_N(t)$, $t \in [-T, T]$;

**ii.** $-\beta + 2m - \dfrac{n}{2} < Im\lambda_1(t) < -\beta + 2m - \dfrac{n}{2} + \mu_1^\star < Im\lambda_2(t) < \cdots < -\beta + 2m - \dfrac{n}{2} + \mu_{N-1}^\star < Im\lambda_N(t) < -\beta' + 2m + l - \dfrac{n}{2}$, $t \in [-\infty, -T) \cup (T, \infty]$;

**iii.** $Im\lambda_j(t) \ne Im\lambda_k(t) + z$, $z \in \mathbb{Z}$, $j \ne k \in \{1, \ldots, N\}$, $t \in \mathbb{R}$.

*Khi đó ta có biểu diễn sau:*

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=0}^{l+\kappa_j-1} r^{-i\lambda_j(t)+s} P_{s,j}(\ln r) + w(x,t), \tag{3.8}$$

*trong đó* $w(\cdot,\cdot) \in V^{2m+l,0}_{\beta',d+l}(-\gamma, Q)$, $P_{s,j}(\cdot)$ *là các đa thức có bậc không vượt quá* $l(\theta_j+2)+\kappa_j+\theta_j-1$, *với các hàm hệ số thuộc không gian* $C^{\infty,d+l}(-\gamma, G_\infty)$, $\kappa_j$ *là số nguyên nhỏ nhất không vượt quá* $-\beta'+2m-\dfrac{n}{2}-Im\lambda_j(t)$ *với mọi* $t \in \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,N$ *và* $\theta_j$ *là bội riêng lớn nhất của giá trị riêng* $\lambda_j(t)$ *với* $j = 1,\ldots,N$.

## 3.4. Các ví dụ áp dụng

Trong phần này, chúng tôi xét bài toán biên Dirichlet cho phương trình Schrödinger cấp hai hai biến tổng quát trong miền góc. Từ đó, chúng tôi chỉ ra một ví dụ cụ thể mà ở đó các giá trị riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}$ phụ thuộc tường minh vào biến thời gian $t$. Và cuối cùng, như một trường hợp đặc biệt, chúng tôi quay trở lại xét phương trình Schrödinger trong cơ học lượng tử.

### 3.4.1. Ví dụ 1

Ở ví dụ này, chúng tôi xét bài toán biên mẫu cho toán tử cấp hai trong miền góc.

Xét miền góc $K = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ 0 < \omega < \omega_0\}$, ở đây $(r,\omega)$ là tọa cực trong mặt phẳng của điểm $x = (x_1, x_2)$ và $0 < \omega_0 < 2\pi$. Đặt $S^0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \omega = 0\}$ và đặt $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \omega = \omega_0\}$, $S^j_\infty = S^j \times \mathbb{R}$, $j = 0,1$. Với mỗi đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, đặt $\alpha_1 + \alpha_2 = |\alpha|$ và $\partial^\alpha_x = \partial^{|\alpha|}/\partial^{\alpha_1}_{x_1}\partial^{\alpha_2}_{x_2}$. Trong mục này, chúng tôi xét bài toán sau

$$iLu - u_t = f \text{ trong } K_\infty, \tag{3.9}$$

với điều kiện biên Dirichlet

$$u\,|_{S^j_\infty} = 0,\ j = 0,1, \tag{3.10}$$

ở đó $L = L(x,t,\partial_x) = \sum_{j,k=1}^{2} a_{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k}$ là toán tử elliptic thuần nhất cấp hai tự liên hợp hình thức trong $K$ với $a_{jk}(t) = a_{kj}(t)$ là các hàm xác định trong $\mathbb{R}$. Hơn nữa, giả sử rằng bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\sum_{j,k=1}^{2} a_{jk}(t)\eta_j\overline{\eta_k} \geq \rho_1|\eta|^2, \tag{3.11}$$

với mọi $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^2,\ t \in \mathbb{R}$, trong đó $\rho_1$ là một hằng số dương. Phần chính của toán tử $L$ tại gốc tọa độ $O$ có dạng

$$\mathcal{L}(t,\partial_x) = \sum_{j,k=1}^{2} a_{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k}.$$

Từ điều kiện (3.11) ta suy ra rằng tồn tại hằng số $\rho_2$ sao cho $a_{jj}(t) \geq \rho_2$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Do đó, ta có thể giả sử $a_{22}(t) \equiv 1$ và khi đó ta biểu diễn toán tử $\mathcal{L}$ ở dạng

$$\mathcal{L} = (\partial_{x_2} - a(t)\partial_{x_1})(\partial_{x_2} - \overline{a(t)}\partial_{x_1}), \tag{3.12}$$

trong đó $a(t) = \alpha(t) + i\beta(t),\ \alpha(t),\ \beta(t)$ là các hàm thực trên $\mathbb{R},\ \beta(t) \geq \rho_3$ với mọi $t$ và $\rho_3$ là một hằng số dương. Bài toán phổ (3.1)-(3.2) trong trường hợp này trở thành

$$\mathcal{L}(\omega,t,\lambda,D_\omega)u = f, \text{ trong } K_\infty, \tag{3.13}$$

$$u\,|_{\omega=0} = 0, \tag{3.14}$$

$$u\,|_{\omega=\omega_0} = 0, \tag{3.15}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\omega,t,\lambda,D_\omega) =& \Big((-\sin\omega + a(t)\cos\omega)i\lambda + (\cos\omega + a(t)\sin\omega)\partial_\omega\Big)\\ &\Big((-\sin\omega + \overline{a(t)}\cos\omega)i\lambda + (\cos\omega + \overline{a(t)}\sin\omega)\partial_\omega\Big).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Và bó toán tử tương ứng với bài toán (3.13)-(3.15) trong trường hợp này được xác định bởi

$$\mathfrak{U}(\lambda, t) = (\mathcal{L}(\omega, t, \lambda, D_\omega), 1, 1).$$

**Mệnh đề 3.1.** *Giả sử $u(x,t)$ là nghiệm của bài toán (3.9)-(3.10) với toán tử vi phân $L$ có phần chính tại gốc tọa độ biểu diễn ở dạng (3.12), trong đó hàm $a(t)$ giải tích. Giả sử $f_{t^k} \in H_0^{l,0}(-\gamma, Q)$ với $k \leq d$, các đường thẳng $Im\lambda = 0$, $Im\lambda = 1$ không chứa các hàm giá trị riêng của bó toán tử $\mathfrak{U}$ và trong dải $0 < Im\lambda < 1$ có các hàm giá trị riêng đơn $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_N(t)$ của bài toán (3.13)-(3.15) với mọi $t$. Khi đó ta có biểu diễn sau:*

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=0}^{\kappa_j - 1} r^{-i\lambda_j(t)+s} P_{s,j}(\ln r) + w(x,t), \tag{3.17}$$

*trong đó $w(\cdot,\cdot) \in V_{0,d}^{2,0}(-\gamma, Q)$, $P_{s,j}$ là các đa thức có bậc không vượt quá $\kappa_j$, với các hàm hệ số thuộc không gian $C^{\infty,d}(-\gamma, G_\infty)$, $\kappa_j$ là số nguyên nhỏ nhất không vượt quá $1 - Im\lambda_j(t)$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, N$.*

### 3.4.2. Ví dụ 2

Trong mục này, sử dụng kết quả tính toán trong mục 3.4.1., chúng tôi đưa ra một trường hợp đặc biệt khi các giá trị riêng của bài toán phổ phụ thuộc thực sự vào biến thời gian $t$.

Lấy $\omega_0 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ đặt $\alpha(t) \equiv 0$ và $\beta(t) = \dfrac{\tan \dfrac{\omega_0}{1 + \epsilon\omega_0 \arctan \sigma(t)}}{\tan \omega_0}$ với $\epsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho $\beta(t) \geq \rho_3 > 0$ và $\sigma(t)$ được chọn sao cho $|a'(t)| = o(e^{2\gamma t})$ khi $t \to -\infty$. Khi đó áp dụng Định lí 3.1, ta có mệnh đề sau:

**Mệnh đề 3.2.** *Lấy $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, \mathbb{R})$ với $0 \leq k \leq d+2$ và $u$ là một nghiệm suy rộng của bài toán (3.9)-(3.10). Khi đó, ta có biểu*

*diễn*

$$u(x,t) = cr^{\pi/\omega_0 + \pi\epsilon \arctan \sigma(t)} + u_1(x,t),$$

*trong đó* $u_1 \in V^{2,0}_{0,d}(-\gamma, Q)$ *và* $c \in C^{\infty,d}(-\gamma, G_\infty)$.

### 3.4.3. Ví dụ 3

Trong mục này, chúng tôi xét mô hình toán học cho phương trình Schrödinger như sau:

$$i\Delta u - u_t = f \text{ trong } Q, \tag{3.18}$$

với điều kiện biên Dirichlet

$$u\,|_\Gamma = 0. \tag{3.19}$$

**Mệnh đề 3.3.** *Giả sử* $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, \mathbb{R})$ *với* $0 \le k \le 3$ *và* $u$ *là một nghiệm của bài toán* (3.18)-(3.19) *với* $n = 2$. *Ta có*

- *nếu* $\omega_0 < \pi$ *thì* $u \in H^2_0(-\gamma, Q)$
- *nếu* $\omega_0 > \pi$ *thì*

$$u(x,t) = c(x,t) r^{\pi/\omega_0} \sin \frac{\pi\omega}{\omega_0} + u_1(x,t),$$

*trong đó* $c \in V^2_{\pi/\omega_0}(-\gamma, Q)$ *và* $u_1 \in H^2_0(-\gamma, Q)$.

**Mệnh đề 3.4.** *Lấy* $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, \mathbb{R})$ *với* $0 \le k \le 3$ *và* $u$ *là một nghiệm suy rộng của bài toán* (3.18)-(3.19) *với* $n = 3$. *Khi đó*

$$|u(x,t)| \le Cr^{Im\lambda_1}, \; C \text{ là hằng số.}$$

**Mệnh đề 3.5.** *Lấy* $f_{t^k} \in L_2(-\gamma, \mathbb{R})$ *với* $0 \le k \le 3$ *và* $u$ *là một nghiệm suy rộng của bài toán* (3.18)-(3.19) *với* $n > 3$. *Khi đó* $u \in H^2_0(-\gamma, Q)$.

# KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

## Các kết quả đạt được

Luận án nghiên cứu về bài toán biên thứ nhất không có điều kiện ban đầu đối với hệ phương trình Schrödinger tổng quát trong miền không trơn. Các kết quả chính của luận án là:

1) Xây dựng được định nghĩa nghiệm suy rộng phù hợp, từ đó chứng minh được sự tồn tại duy nhất nghiệm trong không gian Sobolev $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ và thiết lập được ước lượng tiên nghiệm. Chú ý rằng, mặc dù không có điều kiện ban đầu, nhưng bằng cách xây dựng không gian nghiệm, không gian hàm thử và điều kiện phù hợp của ngoại lực $f$, chúng tôi vẫn nhận được kết quả về sự duy nhất nghiệm.

2) Chứng minh được tính chính quy theo biến thời gian $t$ trong không gian $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(-\gamma, Q)$ của nghiệm suy rộng chỉ phụ thuộc vào tính trơn theo biến thời gian của vế phải và các hệ số mà không phụ thuộc vào tính trơn của biên của miền đang xét. Bên cạnh đó, khi giả sử các hệ số của toán tử $L$ là khả vi vô hạn trong $Q$ thì chúng tôi cũng chứng minh được tính chính quy theo biến không gian và tính chính quy theo cả hai biến. Kết quả thu được cho thấy, trong khi tính chính quy theo biến không gian chỉ phụ thuộc vào tính trơn của vế phải của hệ đang xét thì tính chính quy theo cả hai biến phụ thuộc cả vào phổ của bài toán phổ tương ứng, tức là phụ thuộc vào độ trơn của biên của miền. Phương pháp được chúng tôi sử dụng đó là đánh giá độ trơn của nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu $t = h$, sau đó tiến qua giới hạn khi $h \to -\infty$ để đạt được tính trơn của nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu. Mặc dù đã có các kết quả về tính trơn của nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu

$t = 0$ nhưng chúng tôi không thể áp dụng các kết quả đã có bởi vì trong các kết quả đó, khi thời điểm ban đầu $t = h$ thay đổi thì các hằng số $C$ trong các ước lượng tiên nghiệm cũng thay đổi theo. Do đó chúng tôi phải xây dựng lại các đánh giá để đảm bảo $C$ độc lập với $h$ để có thể qua giới hạn các ước lượng đó khi $h \to -\infty$.

3) Thiết lập được biểu diễn tiệm cận nghiệm của bài toán không có điều kiện ban đầu cho hệ phương trình Schrödinger trong lân cận điểm kì dị của biên. Biểu diễn này cũng tương tự như biểu diễn tiệm cận nghiệm của bài toán có điều kiện ban đầu cho hệ Schrödinger mà ta đã biết trước đó, mặc dù chúng tôi chỉ yêu cầu điều kiện yếu hơn của phổ của bó toán tử $\mathfrak{U}$ (điều kiện **(H)).**

Các kĩ thuật và phương pháp được sử dụng trong luận án có thể áp dụng để nghiên cứu bài toán biên không có điều kiện ban đầu đối với các hệ không dừng tương tự.

**Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo**

Tiếp theo các kết quả của luận án tác giả thấy có một số vấn đề cần được tiếp tục nghiên cứu là:

- Nghiên cứu các bài toán không có giá trị ban đầu cho một số lớp phương trình, hệ phương trình vi phân tiến hóa khác, chẳng hạn phương hệ phương trình parabolic, hyperbolic.

- Nghiên cứu tính chính quy và biểu diễn tiệm cận của nghiệm suy rộng của bài toán trong các miền không trơn khác như miền có cạnh, miền có góc nhị diện,...

- Nghiên cứu bài toán trong các không gian Sobolev với chuẩn $L_p$ trong đó $1 \leq p \neq 2$.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH

1) N. M. Hung, N. T. Lien (2013), "On the solvability of the boundary value problem without initial condition for Schrödinger systems in infinite cylinders", *Boundary Value Problems*, Vol. 2013, Article ID 2013:156, pp. 1-9.

2) N. M. Hung, N. T. Lien (2014), "On the regularity of solutions of the boundary value problem without initial condition for Schrödinger systems in domain with conical points", *Boundary Value Problems*, Vol. 2014, Article ID 2014:181, pp. 1-12.

3) N. M. Hung, N. T. Lien (2016), "On the asymptotic formulas of solutions to the boundary value problem without initial condition for Schrödinger systems in domain with conical points", *Nonlinear Anal.*, Vol. 130, pp. 18-30.